

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»



Д.В. Рудаков

МОДЕЛЮВАННЯ В ГІДРОГЕОЛОГІЇ

Навчальний посібник

Дніпропетровськ
НГУ
2011

УДК 556.3.013
ББК 38.61.05
Р83

Рекомендовано до друку
редакційною радою Державного вищого навчального закладу
«Національний гірничий університет»
(протокол № 3 від 14 березня 2011)

Рецензенти:

І.М. Барг, д-р геол.-мін. наук, професор, професор кафедри геології та гідрогеології Дніпропетровського національного університету ім. Олеся Гончара;

Я.Б. Петровський, д-р техн. наук, проректор з навчальної роботи, професор кафедри вищої математики ДВНЗ «Рівненський державний гуманітарний університет».

Рудаков, Д.В.

Р83 Моделювання в гідрогеології [Текст]: навч. посібник /
Д.В. Рудаков. – Д.: Національний гірничий університет, 2011.
– 88 с.

Викладено теоретичні основи моделювання гідрогеологічних процесів, що включають поняття подібності й аналогій, принципи гідрогеологічної схематизації, застосування аналітичних та чисельних методів моделювання геофільтрації, питання вірогідності й точності моделювання та складання прогнозів фізичних процесів у геологічному середовищі. Містить інструкції до лабораторних робіт, які дозволяють краще засвоїти принципи математичного та фізичного моделювання гідрогеологічних процесів.

Рекомендується для студентів геологічних спеціальностей старших курсів вищих навчальних закладів.

УДК 556.3.013
ББК 38.61.05

© Д.В. Рудаков, 2011

© Державний ВНЗ «НГУ», 2011

ЗМІСТ

Передмова.....	4
Перелік основних позначень.....	6
Розділ 1. ЗМІСТ ТА ЗАДАЧІ МОДЕЛЮВАННЯ В ГІДРОГЕОЛОГІЇ.....	7
Розділ 2. ПОДІБНІСТЬ І АНАЛОГІЇ.....	14
Розділ 3. ПРИНЦИПИ ГІДРОГЕОЛОГІЧНОЇ СХЕМАТИЗАЦІЇ.....	23
Розділ 4. АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ГЕОФІЛЬТРАЦІЇ.....	33
Розділ 5. СКІНЧЕННОРІЗНИЦЕВА МОДЕЛЬ ГЕОФІЛЬТРАЦІЇ.....	43
Розділ 6. ВІРОГІДНІСТЬ І ТОЧНІСТЬ МОДЕЛЮВАННЯ....	55
Розділ 7. МОДЕЛЮВАННЯ ЯК МЕТОД ПРОГНОЗУВАННЯ.....	62
Список літератури.....	69
Лабораторна робота №1. Чисельне моделювання течії підземних вод до прибережного водозабору в програмі ModFlow	70
Лабораторна робота №2. Експериментальне визначення фільтраційних параметрів піщаного ґрунту шляхом зворотного моделювання	79
Додаток 1.....	84
Додаток 2.....	85
Предметний покажчик.....	87

ПЕРЕДМОВА

За останні десятиліття моделювання фактично стало найбільш уживаним інструментом сучасних досліджень у гідрогеології. Воно дозволяє прогнозувати за багатьма сценаріями розвиток фізичних процесів у складних природно-технічних системах, враховуючи багато чинників різного походження.

Масив гірських порід є дуже складним об'єктом, стан якого характеризується великою кількістю показників та параметрів. Їх достовірне визначення часто неможливе через закритий перебіг процесів, недоступний для безпосереднього спостереження, незважаючи на суттєвий прогрес вимірювального обладнання та супутникового зондування Землі. Фізичні та математичні моделі дозволяють відтворювати такі процеси з достатньою для практики достовірністю і точністю.

Особливого значення набуло моделювання як метод прогнозу техногенних змін в геологічному середовищі, зумовлених господарською діяльністю: підйом ґрунтових вод та підтоплення територій, зниження рівня підземних вод поблизу водозаборів, затоплення відпрацьованих шахт, забруднення джерел водопостачання в результаті міграції токсичних речовин у підземних водах, активізація зсувів через порушення гідрогеологічного режиму. Шляхом моделювання обґрунтовуються заходи захисту навколишнього середовища, такі як дренаж, рекультивація ґрунтів у районах видобування корисних копалин, надійна ізоляція високотоксичних відходів у поверхневих та підземних сховищах.

Моделювання в гідрогеології є комплексною дисципліною. Отже, для її опанування потрібне творче поєднання знань та умінь у таких дисциплінах, як основи гідрогеології, динаміка підземних вод, структурна геологія, вища математика, комп'ютерна техніка та програмування. Навчальний посібник має на меті надати базові знання щодо математичного та фізичного моделювання гідрогеологічних процесів у доступній для початківця формі. Більш ґрунтовно окремі питання викладені у цитованих літературних джерелах.

Результатом успішного вивчення даної дисципліни мають стати вміння

1) застосовувати основні гідрогеологічні критерії до первісного аналізу природних умов на об'єкті,

2) проводити гідрогеологічну схематизацію та обирати відповідну розрахункову схему згідно з природно-технічними умовами,

3) проводити кількісні оцінки гідрогеологічних процесів з використанням аналітичних формул,

4) практично використовувати чисельні моделі простих у гідрогеологічному відношенні об'єктів та проводити відповідні розрахунки за допомогою спеціального програмного забезпечення,

5) оцінювати достовірність створених моделей та їхню чутливість до вхідних даних, коректно порівнювати результати моделювання та дані експериментів.

Автор буде вдячний за всі зауваження щодо поліпшення викладеного матеріалу та структури посібника.

ПЕРЕЛІК ОСНОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

- a – п'езопровідність водоносного горизонту, м²/добу;
 C – мінералізація поверхневих та підземних вод, г/л;
 F – площа, м²;
 I – гідралічний градієнт, безрозмірний;
 H – напір, м;
 K – коефіцієнт фільтрації, м/добу;
 L, l – довжина, м;
 M – маса, кг;
 m – товщина (потужність) водоносного або водотривкого шару, м;
 n – пористість, безрозмірна;
 P – периметр, м;
 Q – об'ємна витрата, м³/добу,
 q – питома інтенсивність джерел рідини, м²/добу (для лінійного), м/добу (для площинного);
 R – радіус впливу свердловини, м;
 r – змінний радіус в круговій області фільтрації, м;
 S – зниження рівня підземних вод, м;
 t – час, діб;
 w – інфільтрація, м/добу;
 V – об'єм, м³;
 v – швидкість фільтрації, м/добу;
 x, y, z – декартові координати, м;
 α – масштабні множники при моделюванні, безрозмірні;
 ε – похибка моделювання, визначена з розмірністю розрахованої величини;
 η – гідрогеологічні критерії, безрозмірні,
 μ – водовіддача, безрозмірна;
 φ, ψ – криволінійні координати «еквіпотенціалі – лінії течії», м;
 ρ – густина або щільність, кг/м³,
 Δ – різниця між величинами, визначена з розмірністю розрахованої величини.

Розділ 1

ЗМІСТ ТА ЗАДАЧІ МОДЕЛЮВАННЯ В ГІДРОГЕОЛОГІЇ

Основні поняття моделювання, види моделей, необхідність їх застосування в гідрогеології. Етапи гідрогеологічного моделювання. Фактори, що враховуються в гідрогеологічних моделях. Масштаб моделювання. Класифікація задач гідрогеологічного моделювання.

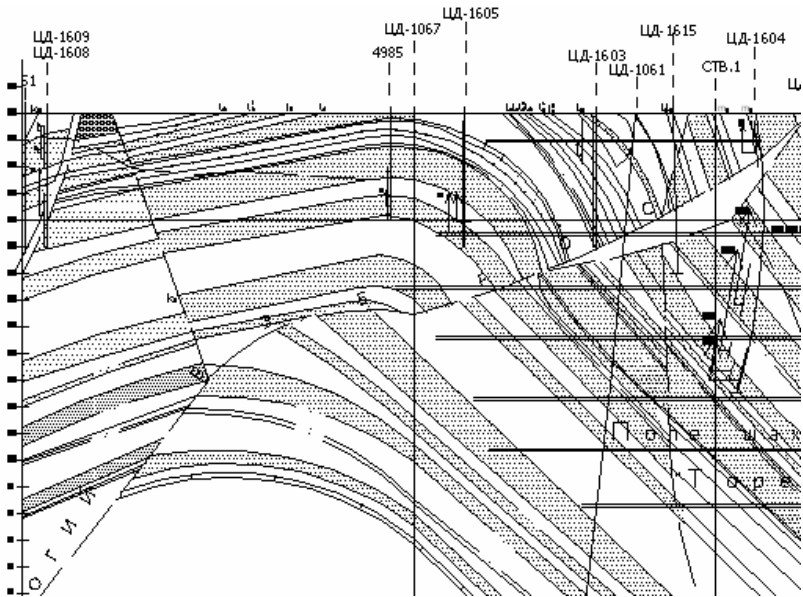
Основні поняття. Моделюванням називають дослідження різних процесів, явищ, об'єктів на основі створення їх моделей. Модель є відтворенням досліджуваного процесу (явища, об'єкта). Усі моделі можна умовно поділити на логічні та матеріальні. Логічні – являють собою сукупність гіпотез, передумов і рівнянь, тобто вони є абстрактними побудовами. Матеріальна (фізична) модель зазвичай реалізується за допомогою спеціальних технічних пристроїв.

Моделювання в гідрогеології вивчає закони побудови моделей гідрогеологічних об'єктів, досліджує на їх основі фізичні процеси. Воно застосовується для управління природно-технічними системами як метод прогнозування наслідків господарської діяльності, зокрема, осушення родовищ корисних копалин, затоплення шахт, дренажу підтоплених територій, водовідбору, змін якості підземних та поверхневих вод тощо.

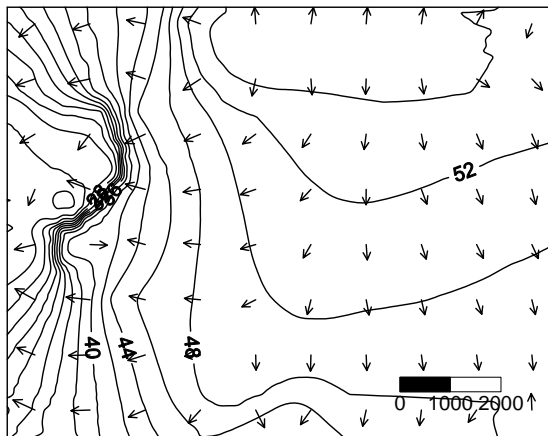
Гідрогеологічними об'єктами можуть бути водоносний горизонт, водоносний комплекс або басейн підземних вод. Їхні параметри описуються за допомогою геологічних і фізичних полів (рис. 1).

Полем у загальному розумінні є область, у межах якої певна характеристика змінюється в просторі і часі. Геологічне поле кількісно характеризує структуру масиву гірських порід та їхні властивості: проникність, пористість та ін. Фізичне поле описує розподіл у просторі і часі параметрів процесів, що відбуваються в геологічному полі: зміни рівня підземних вод, їхньої температури, мінералізації тощо. Таким чином, гідрогеологічний об'єкт можна розглядати як сукупність геологічних і фізичних полів.

Етапи гідрогеологічного моделювання. Підготовка, складання моделі, її практична реалізація виконується за певною послідовністю (рис. 2).



а)



б)

Рис. 1. Приклади геологічного поля – розрізу зі змінними властивостями порід (а) і фізичного поля у вигляді карти рівня та швидкості підземних вод (б)

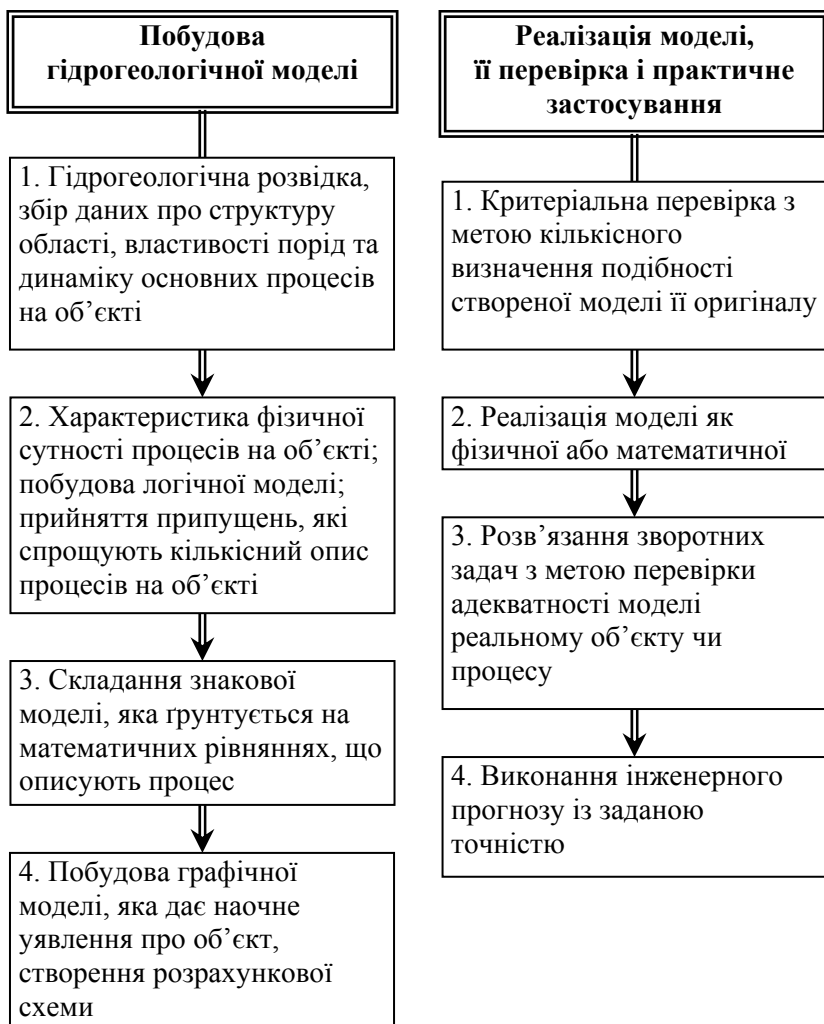


Рис. 2. Етапи гідрогеологічного моделювання [5]

Сучасні гідрогеологічні моделі реалізуються як фізичні або математичні. Фізична модель зазвичай створюється в лабораторних умовах, наприклад, за допомогою посудин, заповнених ґрунтом, або

щілинного жолоба. Математична – ґрунтується на системі диференціальних або алгебраїчних рівнянь і включає їхні розв'язки, аналітичні формули або чисельні алгоритми, а також відповідні програмні засоби. У другій половині ХХ століття широко застосовувались аналогові моделі з використанням електропровідного паперу [8]. Їхнім теоретичним підґрунтям була подібність між стаціонарним фільтраційним потоком та електричним струмом. Аналогові моделі були поступово замінені більш сучасними комп'ютерними моделями, що використовуються як на окремих персональних ЕОМ, так і в розгалужених мережах.

Розроблена модель має бути адекватною реальному об'єкту. Це означає, що в умовах, як правило, неповної інформації вона повинна давати результати, близькі до експериментальних даних. У процесі уточнення можуть бути змінені передумови, прийняті на підготовчому етапі, скореговані математичні рівняння та значення вхідних параметрів.

Для виконання інженерного прогнозу задаються певні вимоги щодо точності результатів розрахунку, які залежать від характеру процесу та достовірності вихідних даних. Наприклад, рівень підземних вод допустимо прогнозувати з похибкою декількох сантиметрів.

Фактори, що враховуються в гідрогеологічних моделях. У загальному випадку в гідрогеологічних моделях мають бути враховані такі фактори [5]:

- 1) літологічна структура,
- 2) зв'язок з іншими водоносними горизонтами (комплексами),
- 3) зв'язок з річковою мережею,
- 4) розташування області живлення, створення напору та розвантаження підземних вод,
- 5) інтенсивність інфільтраційного живлення,
- 6) інтенсивність та глибина ерозійних процесів,
- 7) геостатичне ущільнення порід і пружні запаси води при формуванні пружного режиму фільтрації,
- 8) мінералізація і хімічний склад води,
- 9) температурне поле,
- 10) тектонічні особливості,
- 11) палеофактори геологічного розвитку.

Зазвичай, багато з них не роблять помітного впливу на рух підземних вод, тому можуть бути відкинуті при схематизації.

Тому за кількістю відображуваної інформації моделі умовно поділяються на повні та наближені (неповні), які можуть враховувати всі чи тільки основні параметри процесу. Модель повністю відображає об'єкт, якщо з її допомогою можна прогнозувати всі параметри в будь-якій точці області фільтрації і в часі. Наближені моделі відтворюють не всі, а лише основні характеристики процесу та головні особливості об'єкта, не враховуючи чинники, другорядні в конкретних умовах.

Стационарні моделі є типовим прикладом неповних моделей. Використання моделей стационарної фільтрації доцільно для визначення незбуреного гідрогеологічного режиму, зокрема, до початку дії водозаборів, осушення шахт тощо. На практиці широко використовуються планові та профільні (плоско-вертикальні) моделі фільтрації [3, 9, 10]. Для переходу від тривимірної до двовимірної горизонтальної моделі використовується гіпотеза Мятієва – Гиринського [13], згідно з якою верхня товща порід розглядається як нашарування порід різної проникності. Це дозволяє суттєво спростити кількісний опис руху води у гірських породах. До неповних відносять також одно- й двовимірні моделі нестационарної міграції. Так, розрахунок міграції з хвостосховища, з якого фільтруються розчинені речовини, можна виконувати на основі одновимірної нестационарної моделі міграції уздовж лінії току фільтраційного потоку.

Масштаб моделювання. Залежно від масштабу об'єкта відрізняють локальні і регіональні моделі. Характерний розмір локальних моделей не перевищує кількох кілометрів (масштаб більш крупний за 1:50000). Такі моделі слід використовувати для окремо взятої шахти, хвостосховища, водозабору. Локальні моделі часто створюються на основі аналітичних залежностей шляхом їхньої адаптації до місцевих гідрогеологічних умов та відповідної схематизації (розділ 3).

Об'єкти, які відтворюються регіональними моделями, мають розміри десятків і сотень кілометрів (масштаб більш дрібний за 1:500000). Прикладом таких моделей можуть бути постійно діючі гідрогеологічні моделі [2], що прогнозують рівень підземних вод одночасно у декількох водоносних горизонтах. Для реалізації

регіональних моделей необхідно використовувати спеціальні алгоритми розрахунку і програмні засоби.

Локальні та регіональні моделі відрізняються за такими ознаками [5]:

1) в регіональних моделях більш вагому роль відіграють невизначеності, зумовлені випадковими і погано передбачуваними факторами;

2) статичні (незмінювані) параметри на локальному рівні переходять у динамічні (змінювані) на регіональному рівні, причому зі збільшенням розміру області фільтрації зовнішні межі (річки, ставки) часто перетворюються на внутрішні, зі змінним напором чи витратою;

3) зі збільшенням масштабу моделей зростає роль кліматичних факторів;

4) регіональні моделі відтворюють зазвичай кілька параметрів, тобто є комплексними;

5) для регіональних моделей необхідно створення і використання геоінформаційних систем, які містять дані про топографічну основу, геологічну структуру, вивченість території, господарську діяльність тощо.

При збільшенні масштабу змінюються і значення параметрів, що використовуються у моделі.

Класифікація задач гідрогеологічного моделювання

1. Прямі задачі або задачі прогнозу. За заданими розмірами області, фізичними параметрами і граничними умовами треба знайти розподіл динамічних функцій в області фільтрації протягом заданого періоду часу, наприклад, рівня підземних вод, їх мінералізації або температури.

2. Зворотні задачі або задачі епігнозу. За відомими динамічними функціями і параметрами гірських порід, заданими у вигляді карт або часових рядів, треба оцінити граничні умови (зовнішні впливи), за якими сформувався певний стан гідрогеологічного об'єкта. Оцінюваними параметрами можуть бути дебіти свердловин, розташування та інтенсивність джерел техногенної інфільтрації.

3. Інверсні задачі. За відомими динамічними функціями і граничними умовами необхідно оцінити параметри гірських порід в області фільтрації, наприклад, їхню проникність або пористість.

4. Індуктивні задачі. За допомогою таких задач треба уточнити математичні співвідношення, що описують фізичний процес, а також встановити роль окремих факторів. Наприклад, це може бути уточнення геологічної будови товщі порід з метою адекватного врахування перетікання через водотривкі шари, оцінювання можливості застосування спрощених планових моделей фільтрації замість тривимірних у певних гідрогеологічних умовах та ін.

Задачі другого, третього і четвертого типів часто узагальнюють як зворотні.

Питання для самоконтролю

1. У чому полягає особливість моделювання як методу дослідження? З якою метою застосовується моделювання в гідрогеології?

2. Наведіть приклади об'єктів гідрогеологічного моделювання, визначте їхній масштаб.

3. Чим фізичне поле відрізняється від геологічного? Наведіть приклади таких полів.

4. Розкрийте зміст етапу підготовки та складання гідрогеологічних моделей.

5. Поясніть зміст понять: «логічна модель», «знакова модель», «графічна модель».

6. Чим подібні та чим відрізняються фізична та математична моделі?

7. Що передує практичному застосуванню моделей?

8. Наведіть приклади наближених моделей. Які чинники в них вважаються несуттєвими та не враховуються?

9. Визначте відмінності між локальними і регіональними моделями. Які чинники найбільш вагомими при розробці локальних моделей?

10. Наведіть приклади прямих та зворотних задач гідрогеологічного моделювання.

Розділ 2 ПОДІБНІСТЬ І АНАЛОГІЇ

Подібність і її види. Аналогії. Масштабні коефіцієнти. Теорема теорії подібності. Критерії подібності гідрогеологічних процесів.

Подібність у загальному сенсі слід розуміти як пропорційність. У моделях використовуються такі види подібності, як геометрична, механічна і часова [2, 5, 8].

Геометрична подібність двох тіл означає збіг усіх їхніх точок у разі рівномірної деформації або обертання навколо спільного центра тяжіння. Іншими словами, у геометрично подібних об'єктів (систем) лінійні розміри пропорційні, а кути рівні між собою. Отже, два тіла геометрично подібні, якщо їх лінійні розміри x , y , z є пропорційними (рис. 3), тобто

$$\alpha_l = \frac{l_1}{l_2} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = const, \quad (1)$$

де α_l – масштабний коефіцієнт лінійних розмірів.

Два тіла афінно-подібні, якщо їхні деформації за різними напрямками неоднакові

$$\alpha_x = \frac{x_1}{x_2}, \alpha_y = \frac{y_1}{y_2}, \alpha_z = \frac{z_1}{z_2}. \quad (2)$$

де α_x , α_y , α_z – масштабні коефіцієнти лінійних розмірів за осями координат, причому $\alpha_x \neq \alpha_y \neq \alpha_z$.

Два тіла подібно розташовані, якщо вони можуть бути отримані одне з одного шляхом рівномірної деформації. Наприклад, якщо напори (рівні) підземних вод на межах моделі та об'єкта становлять відповідно $H_{0,1}$, $H_{0,2}$ і $H_{L,1}$, $H_{L,2}$, а їх довжини складають L_1 і L_2 (рис. 4), то геометрична пропорційність записується у вигляді:

$$\frac{H_{0,1}}{H_{0,2}} = \frac{H_{L,1}}{H_{L,2}} = \frac{L_1}{L_2}. \quad (3)$$

Механічна подібність означає матеріальну, динамічну і кінематичну подібності. Матеріальна подібність ґрунтується на пропорційності мас або значень щільності, динамічна – на пропорційності сил, кінематична – на пропорційності швидкостей і

прискорень. Ці види подібності характерні для фільтрації підземних вод як руху рідини.

Часова подібність полягає в пропорційності порівнянних інтервалів часу, що розділяють подібні моменти. Подібність моментів часу залежить від розміру системи. Так, за умов рівності всіх фізичних властивостей подібні процеси у моделі тривають у $1/\alpha_t$ разів швидше, ніж в об'єкті.

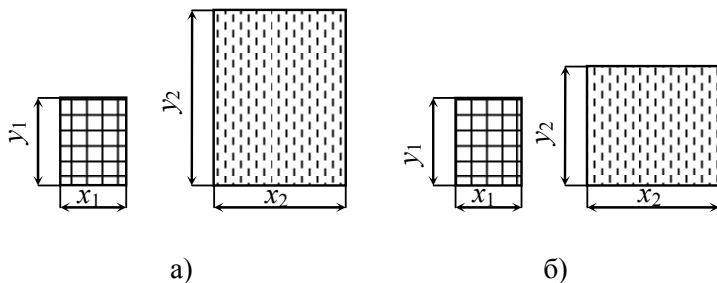


Рис. 3. Подібність об'єктів: а) геометрична, б) афінна

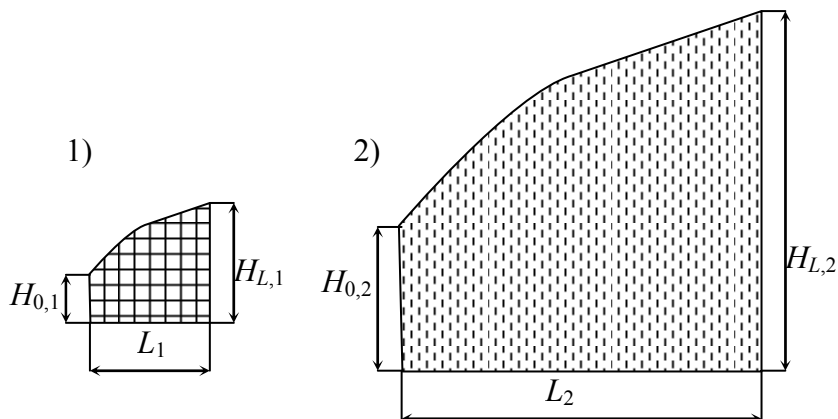


Рис. 4. Подібність розташування моделі (1) та об'єкта (2)

Змінними можуть бути всі параметри, характеристики та показники на об'єкті. Вони бувають трьох видів: 1) конкретні (наприклад, рівень підземних вод, визначений у свердловині в деякий момент часу), 2) усереднені у певному об'ємі (загальний об'єм пор пласта, фільтраційний опір водотриву), 3) узагальнені (такі як середнє багаторічне значення інфільтрації, зведений напір для шаруватої товщі порід тощо).

Змінні характеризують процеси в подібних точках у подібні моменти часу. Нехай «1» та «2» – подібні точки на моделі та об'єкті. Тоді в будь-який момент часу t_i мають виконуватися пропорції

$$\frac{t_1^{(1)}}{t_1^{(2)}} = \frac{t_2^{(1)}}{t_2^{(2)}} = \dots = \frac{t_i^{(1)}}{t_i^{(2)}} = \text{const.}$$

Аналогія являє собою узагальнення подібності. Подібні та аналогічні процеси відбуваються в геометрично та афінно-подібних об'єктах. Подібні процеси (наприклад, фільтрація у водоносному горизонті та в лабораторній трубці з піском) мають однакові змінні й фізичну природу. Аналогічні процеси (фільтрація у водоносному горизонті та електричний струм через електропровідний папір) мають різну фізичну природу та основні змінні, які характеризують процеси в подібних точках і в подібні моменти часу.

Кількісно аналогія і подібність характеризується *масштабними коефіцієнтами*, що є відношенням двох розмірних однойменних величин. Наприклад, масштабний множник показує, у скільки разів відрізняється коефіцієнт фільтрації на об'єкті K_1 і в моделі K_2 : $\alpha_K = K_1/K_2$. Співвідношення між двома різними масштабними коефіцієнтами можна показати на прикладі зіставлення мас двох тіл:

$$M_1 = \rho_1 V_1, \quad M_2 = \rho_2 V_2,$$

де M_1, M_2 – маси об'єкта і моделі, ρ_1, ρ_2 – їхні щільності, V_1, V_2 – об'єми. Константи подібності визначаються за формулами

$$\alpha_\rho = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad \alpha_V = \frac{V_1}{V_2} = \frac{l_1^3}{l_2^3} = \alpha_l^3, \quad \alpha_M = \frac{M_1}{M_2} = \alpha_\rho \alpha_l^3,$$

де l_1 і l_2 – лінійні розміри об'єкта і моделі. Отже,

$$M_1 = \rho_1 V_1 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \rho_2 \alpha_l^3 V_2 = \alpha_\rho \alpha_l^3 M_2,$$

тобто відношення мас пропорційно відношенню щільностей та кубів лінійних розмірів об'єкта і моделі.

Константа подібності для фільтраційних витрат визначається шляхом підстановки масштабних множників у закон Дарсі

$$Q_1 = K_1 F_1 \frac{\Delta H_1}{\Delta l_1}, \quad Q_2 = K_2 F_2 \frac{\Delta H_2}{\Delta l_2}, \quad (4)$$

$$\alpha_Q = Q_1/Q_2 = \alpha_K \alpha_i^2 \alpha_H / \alpha_l = \alpha_K \alpha_l \alpha_H. \quad (5)$$

Таким чином, множник подібного перетворення можна отримати підстановкою в початкове співвідношення розмірних і безрозмірних величин.

Подібність фізичних полів визначається сталістю відношення деякої фізичної величини для всіх пар подібних точок моделі та об'єкта:

$$\frac{K_1^{(1)}}{K_1^{(2)}} \approx \frac{K_2^{(1)}}{K_2^{(2)}} \approx \dots \approx \frac{K_i^{(1)}}{K_i^{(2)}} \approx const.$$

Подібність фільтраційних полів являє собою пропорційність усіх компонент швидкості фільтрації у подібних парах точок моделі та об'єкта:

$$\frac{v_1^{(1)}}{v_1^{(2)}} \approx \frac{v_2^{(1)}}{v_2^{(2)}} \approx \dots \approx \frac{v_i^{(1)}}{v_i^{(2)}} \approx const.$$

Критерії подібності. Ступінь подібності характеризується критерієм подібності – безрозмірним комплексом, складеним з розмірних співмножників. Критерії можуть бути визначальними і визначуваними. Шукана величина (наприклад, рівень підземних вод) входить тільки у визначувані критерії.

Прикладом визначального критерію є співвідношення

$$\eta_0 = \frac{at}{L^2}, \quad (6)$$

де $a = T/\mu$ – п'єзопровідність ($m^2/добу$), T – провідність, μ – водовіддача, L – характерний розмір області, м. Безрозмірним комплексом є також $wt/m\mu$, де w – інфільтрація, m – потужність водоносного горизонту. Співвідношення (6) ще позначають Fo і

називають критерієм Фур'є за аналогією між фільтрацією та теплопровідністю в твердих тілах.

Критерій подібності можна подати у вигляді відношення двох однойменних величин. Критерії, до яких входять різнойменні величини, називаються критеріями-комплексами, а критерії з однойменними величинами – критеріями-симплексами.

Необхідно розрізнити величини з неоднаковими (a, v) та незалежними (x, t) розмірностями. Так, відстань x і час t не можна виразити через величини з іншими розмірностями. Проте п'єзопровідність a або швидкість фільтрації v мають розмірність, яку можна виразити у вигляді комбінації інших розмірностей – відстані і часу.

Комплекс із безрозмірних величин характеризує масштаб коефіцієнта. Так, для закону Дарсі можна записати

$$v = -K \frac{\Delta H}{\Delta l}, \quad \alpha_v = \alpha_K \frac{\alpha_H}{\alpha_l}, \quad \frac{\alpha_K \alpha_H}{\alpha_l \alpha_v} = 1. \quad (7)$$

Теорема теорії подібності визначають властивості подібних та аналогічних об'єктів, що важливо при побудові моделей, адекватних природному об'єкту.

1. Якщо явища або процеси подібні (аналогічні), то їхні індикатори подібності (аналогії) дорівнюють одиниці, а критерії подібності (аналогії) рівні між собою.

Наприклад, для аналогічних процесів фільтрації та струму через електропровідний папір можна записати співвідношення [5, 8]

$$\alpha_R = \frac{R}{\Phi}, \quad \alpha_U = \frac{U}{\Delta H}, \quad \alpha_I = \frac{I}{Q},$$

де R , U , I – відповідно опір, напруга та сила електричного струму; Φ – фільтраційний опір, $\Phi=1/K$; ΔH – перепад напору; Q – витрата підземних вод. Таким чином визначається пропорційність параметрів процесів на моделі з електропровідного паперу та у водоносному горизонті.

2. (π -теорема). Нехай процес описується N фізичними величинами, з яких k – мають незалежну розмірність, а j – неоднакову. Тоді повне рівняння, що пов'язує всі величини, можна звести до безрозмірного вигляду, в якому буде $N-k$ безрозмірних

величин у вигляді комплексів та симплексів. Число комплексів $M_c = j - k$, а число симплексів $M_s = N - j$.

Наприклад, одновимірна неусталена фільтрація описується моделлю, до якої входить 7 величин ($N=7$): напір в області H , на межах H_0 та H_1 , час t , відстань x , розмір області L , п'єзопровідність a . Неоднакову розмірність мають величини H , a , t ($j=3$), незалежну – час t і відстань x ($k=2$). Тоді для опису процесу можливий лише один критерій-комплекс (6), оскільки $M_c = n - k = 1$, та чотири симплекси $\overline{x}, \overline{t}, \overline{H}, \overline{H_1}$, оскільки $M_s = N - j = 4$. Отже, рівняння, що пов'язує шуканий напір з іншими параметрами, можна записати в критеріальному вигляді

$$\frac{H(x,t)}{H_0} = f\left(\frac{at}{L^2}, \frac{x}{L}, \frac{t}{t_0}, \frac{H_1}{H_0}\right).$$

3. Явища (процеси) подібні, якщо рівняння, що описують їх, тотожні, умови однозначності подібні, а визначальні критерії подібності рівні між собою.

Лише у разі виконання умов третьої теореми можна побудувати модель, адекватну природному об'єкту.

Критерії подібності гідрогеологічних процесів

1. Критерій Фур'є для напірної несталі фільтрації (6) характеризує ступінь розвитку процесу. Якщо $Fo > 1$, то процес можна вважати таким, що стабілізується. Наприклад, для водоносного горизонту з провідністю $T=1000$ м²/добу, водовіддачею $\mu=0,2$ та характерним розміром $L=2000$ м фільтраційні зміни стабілізуються через 800 діб (близько 2,2 року), хоча фактично це відбудеться скоріше.

2. Критерій

$$\eta_1 = \frac{Q_v}{Q_h} = \frac{wL}{KmH/L} \quad (8)$$

визначає співвідношення вертикального і горизонтального припливів до водоносного горизонту. Тут w – інфільтрація, m – потужність водоносного горизонту, H – рівень підземних вод. Наприклад, $w = 10^{-4}$ м/добу, $K=0,01$ м/добу, $m = 10$ м, $H = 100$ м, $L = 500$ м. Тоді $Q_v = 0,05$ м²/добу, $Q_h = 0,02$ м²/добу; отже, в даних умовах вертикальний потік переважає над горизонтальним.

3. В умовах перетікання через водотривкий шар відношення горизонтального припливу TH/L^2 до вертикального $K'H/m'$ дає безрозмірний критерій

$$\eta_2 = \frac{Tm'}{L^2 K'}, \quad (9)$$

де H – напір, K' і m' – коефіцієнт фільтрації і потужність водотривкого шару. У фільтраційних розрахунках перетікання через цей шар використовується параметр $B = \sqrt{Tm_0/K'}$ з розмірністю довжини, визначений на основі критерію η_2 . Зі зростанням B перетікання зменшується.

4. Відношення дебіту Q свердловини до провідності T має розмірність напору H . Тому безрозмірний комплекс

$$\eta_3 = Q/TH \quad (10)$$

показує відношення дебіту до горизонтального відтоку або припливу. Знак величини η_3 залежить від того, чи відбирає свердловина воду («-»), чи є нагнітальною («+»).

Питання для самоконтролю

1. Охарактеризуйте види подібності для фільтрації як руху рідини.

2. Визначте схожість і відмінність подібних та аналогічних гідрогеологічних процесів.

3. Розкрийте сутність афінної і часової подібностей.

4. Які масштабні множники використовуються при моделюванні фільтрації?

5. Як співвідносяться між собою маси двох тіл, якщо: а) їхні щільності відрізняються у 2 рази, б) всі розміри одного тіла більші у 2 рази, ніж у другого, в) два з трьох розмірів одного тіла більші у 3 рази, ніж у другого?

6. Чи подібні два водоносних горизонти, якщо їх розміри відрізняються у 2 рази, а значення параметрів проникності в подібних точках – у 3 рази?

7. Чи подібні два водоносних горизонти, якщо в подібних точках горизонтальна швидкість фільтрації в першому шарі у 2 рази більша,

ніж у другому, і: а) вертикальна швидкість фільтрації в обох шарах однакова, б) вертикальна швидкість фільтрації в першому шарі у 2 рази більша, ніж у другому?

8. Наведіть приклади величин з незалежними і неоднаковими розмірностями з такого списку: провідність, пористість, коефіцієнт фільтрації, товщина і довжина водоносного горизонту, час, напір, інтенсивність інфільтрації.

9. Які безрозмірні критерії (комплекси і симплекси) можна скласти з таких величин: час, довжина, напір, провідність, пористість або водовіддача, коефіцієнт фільтрації, товщина водоносного шару, коефіцієнт фільтрації і товщина водотривкого шару?

10. На прикладах покажіть відмінності критеріїв-комплексів від критеріїв-симплексів.

11. Відповідно до критерію Фур'є (6) обґрунтуйте, чи пришвидшиться фільтрація внаслідок: а) збільшення провідності, б) збільшення пористості, в) зменшення розмірів області.

Задачі

1. Користуючись критерієм (8), визначити, при перевищенні якої інфільтрації w (мм/добу) вертикальний приплив до водоносного шару буде переважати над горизонтальним: а) $K=2$ м/добу, б) $K=0,5$ м/добу, в) $K=0,2$ м/добу. Значення інших параметрів узяти такими: $L = 500$ м, $H = 40$ м, $h = 10$ м.

Розв'язування. Вертикальний приплив переважає, коли $\eta_1 > 1$ ($\eta_1 = Q_v/Q_h$), тобто у разі $wL^2/KhH > 1$ або $w > KhH/L^2$. Отже, для наведених значень коефіцієнта фільтрації маємо: а) $w > 3,2$ мм/добу, б) $w > 0,8$ мм/добу, в) $w > 0,32$ мм/добу.

2. Користуючись критерієм (8), визначити, при перевищенні якої товщини водоносного шару h (м) вертикальний приплив до нього буде переважати над горизонтальним: а) $K = 0,1$ м/добу, б) $K = 0,3$ м/добу, в) $K = 0,02$ м/добу. Значення інших параметрів такі: $L = 300$ м, $H = 50$ м, $h = 10$ м.

Розв'язування проводиться аналогічно до задачі 1.

3. Користуючись критерієм (8), визначити, при перевищенні якого коефіцієнта фільтрації K (м/добу) вертикальний приплив до нього буде переважати над горизонтальним: а) $w = 1$ мм/добу, б) $w = 0,3$ мм/добу, в) $w = 0,1$ мм/добу. Значення інших параметрів такі: $L = 300$ м, $H = 50$ м, $h = 10$ м.

Розв'язування проводиться аналогічно до задачі 1.

4. Користуючись критерієм (10), визначити, при якому значенні T відбір води буде компенсуватися бічним припливом: а) $Q = 200$ м³/добу, б) $Q = 500$ м³/добу, в) $Q = 1000$ м³/добу. Напір $H = 20$ м.

Розв'язування. Відбір води буде компенсуватися боковим припливом підземних вод у разі, коли $Q < TH$. Отже, відповідні мінімальні значення провідності дорівнюють: а) 10 м²/добу, б) 25 м²/добу, в) 50 м²/добу.

5. Користуючись критерієм Фур'є (6), визначити, коли відбудеться стабілізація фільтраційних змін у водоносному горизонті потужністю 20 м та з коефіцієнтом фільтрації K : а) $2,5$ м/добу, б) 10 м/добу, в) 20 м/добу. Прийняти $L = 1000$ м, $\mu = 0,2$. Зробити висновки щодо впливу параметра K на час стабілізації процесу.

Розв'язування. Вважаємо, що процеси теплопровідності, аналогічні фільтрації підземних вод, стабілізуються для $Fo > 1$. За цього припущення стабілізація фільтраційних збуджень настане для $t > L^2/a$ або $t > \mu L^2/Km$. Для заданих значень коефіцієнта фільтрації цей час становитиме: а) 4000 діб (≈ 11 років), б) 1000 діб ($\approx 2,75$ року), в) 500 діб ($\approx 1,37$ року).

Отже, збільшення коефіцієнта фільтрації пришвидшує стабілізацію фільтраційних збуджень.

Аналогічно робляться висновки щодо впливу інших параметрів (m , L , μ) у разі їхньої варіації на темпи стабілізації фільтраційних збуджень.

Розділ 3

ПРИНЦИПИ ГІДРОГЕОЛОГІЧНОЇ СХЕМАТИЗАЦІЇ

Задачі типізації та схематизації гідрогеологічних умов. Схематизація структури фільтраційного потоку, його меж, неоднорідності гірських порід та водоносних горизонтів, джерел водного балансу.

Задачі типізації та схематизації гідрогеологічних умов. Типізація являє собою виділення однотипних ділянок за такими ознаками, як структура фільтраційного потоку, умови залягання водоносних горизонтів, їхня будова та межі. Результатом типізації є районування території із зазначенням застосовності певних розрахункових схем.

Схематизація – це спрощення природних умов у межах установлених типів районів, на основі чого будуються розрахункові схеми та геофільтраційні моделі. До задач схематизації відносять

- визначення головних та другорядних гідрогеологічних чинників;
- обґрунтування найбільш вірогідної схеми пласта і значень її параметрів;
- можливе спрощення схеми та зменшення вимірності потоку;
- врахування впливу сусідніх водоносних горизонтів;
- визначення зон впливу інженерних споруд (дрен, ставків та ін.);
- спрощення форми меж області, законів зміни рівнів води і витрат.

Отже, гідрогеологічна схематизація виконується з метою коректного використання наявного математичного апарату відповідно до місцевих умов. Результатом схематизації є певне спрощення структури фільтраційного потоку, його меж, неоднорідності гірських порід в області фільтрації, а також джерел водного балансу. Спрощення має враховувати, яким методом (аналітичним або чисельним) виконуватиметься моделювання. Зазвичай аналітичні методи можна застосовувати у більш спрощених гідрогеологічних умовах.

Розрахункова схема являє собою карту або розріз із зазначенням розмірів області, будови пласта, його параметрів, типів та

характеристик граничних умов, факторів прогнозу (свердловин, каналів, дрен з їхніми параметрами), діапазонів змін параметрів та похибок їх визначення.

Схематизація структури фільтраційного потоку полягає у визначенні розмірності області фільтрації та обґрунтуванні спрощених схем планового, плоско-вертикального чи одновимірного потоку.

Схема планового потоку ґрунтується на припущенні щодо значного переважання горизонтальної складової фільтрації над вертикальною. Такий підхід можливий за умови, якщо вертикальні розміри водоносного горизонту на порядок-два менші за горизонтальні. Усереднений за потужністю пласта напір $h_c(x, y, t)$ не залежить від координати z на відміну від фактичного напору $h(x, y, z, t)$. Вважається, що швидкість фільтрації однакова на будь-якій глибині між покрівлею та подошвою пласта. Насправді різниця між напором на покрівлі та подошві існує, але для неглибоких пластів потужністю до 20 м вона оцінюється у декілька сантиметрів. Схема планового потоку більш застосовна в регіональних моделях, її теоретичним підґрунтям є гідравлічна теорія фільтрації Дюпюї [2] та гіпотеза Мятієва – Гиринаського щодо шаруватої структури верхньої товщі порід [13] (рис. 5).

Профільний потік являє собою рух рідини лише у вертикальній площині (рис. 6). Така схема застосовується, якщо області потоку, їхня структура і характер течії у двох близько розташованих вертикальних площинах збігаються або близькі. Вважається, що напір у двох подібно розташованих точках цих перерізів однаковий ($H_1 = H_2$). Схема профільного потоку адекватна умовам фільтрації поблизу гідротехнічних споруд, бортів кар'єрів, дрен значної довжини.

Радіальний потік, з одного боку, є плановим, з іншого – одновимірним: напір залежить від однієї просторової координати – відстані від свердловини (колодязя) до розрахункової точки. В центрі кола задається джерело (стік), а на однаковій значній відстані від нього – напір у незбуреному потоці. Оскільки в чистому вигляді така схема практично не існує, її застосовність слід обумовити: 1) максимальною близькістю форми області фільтрації до кола; 2) максимально близьким розташуванням свердловини (колодязя) до центру цього кола; 3) однорідністю порід в області фільтрації,

4) часом дії джерела (стоку) в центрі, коли радіус впливу не досяг фактичних меж області, які за формою суттєво відрізняються від кола.

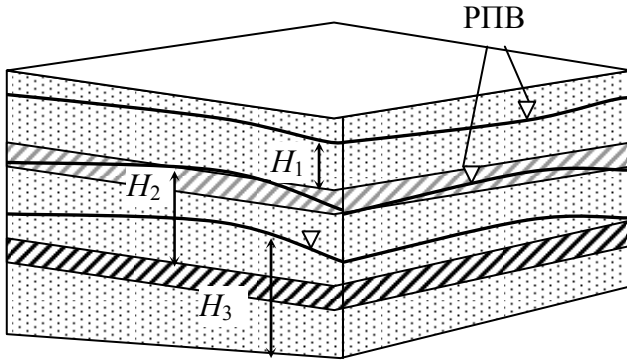


Рис. 5. Схематизація шаруватої товщі порід згідно з гіпотезою Мятієва – Гирицького: H_1, H_2, H_3 – рівні підземних вод (РПВ) у різних водоносних горизонтах

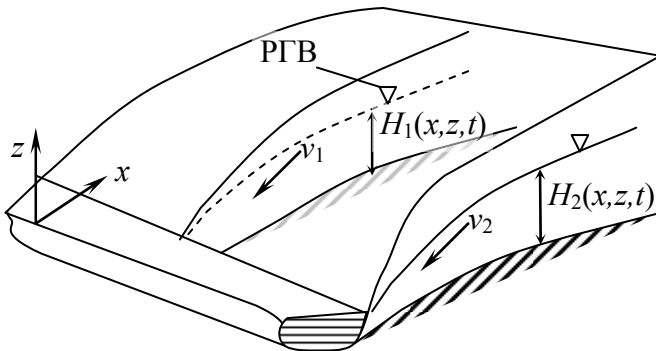


Рис. 6. Подібність фільтраційної течії у паралельних вертикальних площинах. H_1, H_2 – рівні ґрунтових вод (РГВ) у різних вертикальних перерізах водоносного горизонту

Критерієм для першої умови може бути відношення периметра області фільтрації до довжини периметра кола тієї ж площі. Відомо, що окружність обмежує максимально можливу площу при мінімальному периметрі. Позначимо через S_1 і P_1 площу і периметр області фільтрації, S_2 і P_2 – площу і периметр кола, причому $S_1 = S_2$ (рис. 7). Область фільтрації наближається за формою до кругової, якщо $P_1/P_2 \rightarrow 1,0$. Для квадрата це відношення становить близько 1,13, для восьмикутника – 1,03, тобто восьмикутник можна розглядати як коло.

Критерій для другої умови можна обґрунтувати, оцінивши відхилення центру області фільтрації від положення свердловини (колодязя). Якщо відстань між двома пунктами Δr , а середній радіус області R_c , то за умови $\Delta r/R_c < 0,1$ допустимо прийняти схему радіального потоку з центром у свердловині (колодязі). Невідповідність цій умові означає порушення симетрії течії до центру області. Якщо радіус впливу свердловини $R_c = 1,5\sqrt{at}$ не досяг меж області фільтрації до моменту часу τ , то для періоду $t < \tau$ навіть за невідповідності геометричної форми область можна схематизувати як кругову.

Схема одновимірного потоку допустима, якщо відстань між двома межами області фільтрації несуттєво змінюється на ділянці досить великої довжини. Напір залежить лише від однієї просторової координати – відстані між межами, а бічне розтікання вважається незначним.

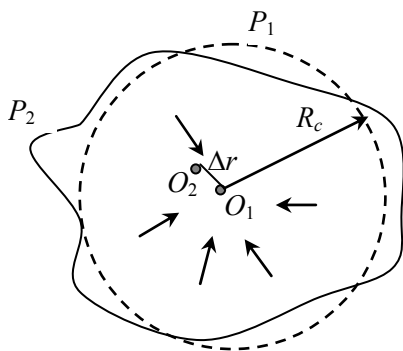


Рис. 7. Схематизація фільтраційного потоку як радіальної течії:
 O_1, O_2 – центри області фільтрації та кругової області після схематизації, P_1, P_2 – периметри областей

Для схематизації структури потоку часто використовуються спеціальні прийоми, такі як його фрагментація чи введення інших систем координат. Фрагментація потоку являє собою виокремлення його частин, наприклад, обмежених лініями течії, причому потік в кожній з них розглядається незалежно один від одного. У разі сильного викривлення сітки течії замість прямокутних декартових (x, y) доцільно ввести криволінійні координати «лінії рівних напорів – лінії течії» (рис. 8).

Схематизація меж області фільтрації для двовимірних моделей зазвичай виконується за допомогою ламаної – контуру, що апроксимує фактичну межу, для тривимірних моделей – ділянками площин. Якщо для чисельних методів довільна форма межі не викликає серйозних ускладнень, то для аналітичних доводиться використовувати прості форми областей, обмежених прямими або круговими дугами.

Поверхневі водотоки (водойми) та дрени часто не мають повного контакту з водоносним горизонтом. Їхня недовершеність у схемі планового потоку відтворюється за допомогою поправкових коефіцієнтів, що враховують площу контакту з підземними водами. Так, при заглибленні русла на 0,7–0,8 потужності водоносного горизонту контакт «річка – водоносний горизонт» можна розглядати як межу першого роду, де задано рівень підземних вод, еквівалентний рівню води у річці (рис. 9). При меншому заглибленні слід зважати на фільтраційний опір за рахунок збільшення довжини шляху фільтрації та відкладів під руслом ріки, використовуючи граничну умову третього роду.

При схематизації меж течії в окремих випадках допустимо їх випрямлення або заміна обмеженої області на необмежену. Випрямлення можливо, якщо максимальне відхилення контуру реальної межі від його прямолінійної апроксимації Δl незначне в порівнянні з характерною відстанню від об'єкта (свердловини, колодязя) до межі L (рис. 10).

Схематизація неоднорідності залежить від масштабу області фільтрації та відношення її розмірів до розмірів неоднорідного включення.

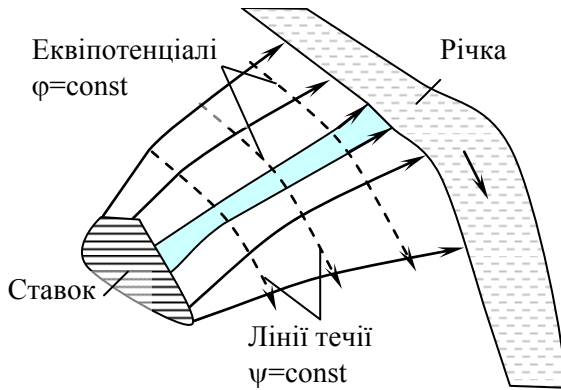


Рис. 8. Сітка течії з криволінійними координатами (φ, ψ) «лінії рівних напорів – лінії течії»

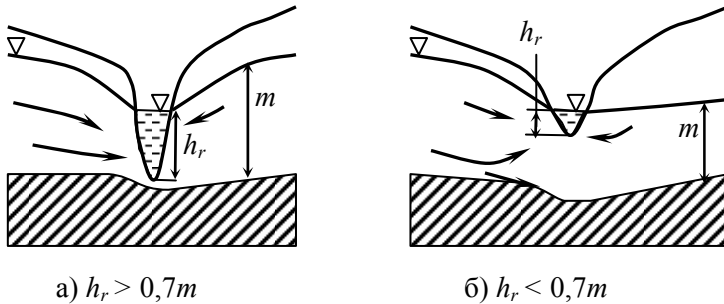


Рис. 9. Схематизація контакту «річка – водоносний горизонт»: довершена (а) і недовершена (б) межі

Неоднорідність гірських порід проявляється у зміні їх властивостей у просторі і часі, тобто як розкид значень відповідних параметрів. Фльтраційна неоднорідність означає просторову зміну проникності та пористості, що обумовлені структурою гірських порід. Їхню неоднорідність на мікрорівні можна характеризувати параметром $\eta_d = d_{60}/d_{10}$: за умови $\eta_d < 5$ ґрунт можна вважати однорідним, якщо $\eta_d > 5$ – неоднорідним.

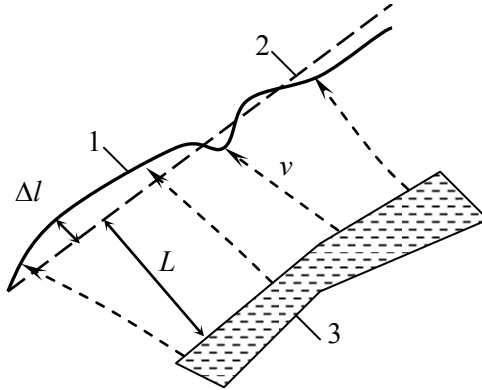


Рис. 10. Спрощення меж одновимірного потоку: 1 – реальна межа області фільтрації, 2 – випрямлена межа в моделі, 3 – водний об’єкт

Неоднорідність водоносного горизонту або макронеоднорідність можна характеризувати за допомогою логарифма провідності $\xi = \ln T$, розглядаючи параметр ξ як випадкову величину. Якщо її середнє відхилення $\sigma_{\ln T}$ не перевищує 0,1, то водоносний горизонт можна вважати однорідним. Найбільш однорідні є піски, для яких $\sigma_{\ln T} \approx 0,05$, найменш однорідні – тріщинуваті і карстові породи, для яких σ_T збільшується до 1,3 [11].

Приклад 1. В результаті дослідно-фільтраційних робіт отримані такі оцінки провідності водоносного пласта T : 150, 240, 410 і 315 та 610 м²/добу. Тоді значення $\ln T$ дорівнюють 5,01, 5,48, 6,02, 5,75, 6,41 відповідно, а їх середнє значення становить 5,73, що відповідає $T_{\text{сер}} = 309,4$ м²/добу. Середньоквадратичне відхилення $\sigma_{\ln T} = 0,53$ свідчить про значну неоднорідність випробуваного пласта.

Неоднорідність може бути хаотичною або незакономірною, і у цьому разі властивості пласта та відповідні параметри допустимо усереднювати. Нехай R_n – розмір області неоднорідності, що є включенням типу каверни або інженерної споруди. Можна виділити чотири типи неоднорідності, яка:

- 1) домірна розміру області, в якій моделюється процес ($R_n \geq 10^2$ м),
- 2) має локалізовану область впливу ($10 < R_n < 10^2$ м);
- 3) має незначну зону впливу ($10^{-1} < R_n < 10$ м);
- 4) проявляється на рівні окремих тріщин та пор ($R_n < 10^{-1}$ м).

Позначимо через R_g розмір зони впливу неоднорідності. Залежно від співвідношення розмірів неоднорідності і модельованої області $\psi = R_g/R_n$ та сама область фільтрації може розглядатись як однорідна або неоднорідна. Так, у разі $10^{-1} < \psi < 10^2$ область фільтрації вважається неоднорідною, для $\psi < 10^{-2}$ і $\psi > 10^3$ – однорідною, для $10^{-1} < \psi < 10^{-2}$ і $10^2 < \psi < 10^3$ – квазіоднорідною [11].

Приклад 2. Об'єм тріщинуватої породи 1 м^3 з максимальним розкриттям тріщин до 1 мм відповідно до вищезазначеної класифікації ($\psi = 10^{-3}$) можна розглядати як однорідний; при зменшенні його до 1 дм^3 вплив окремих тріщин і пор стає відчутним, а сам зразок вже не може вважатися однорідним. Аналогічно оцінюється об'єм масиву порід, що містить підземні виробки, при якому порушена товща може вважатись однорідною.

Параметри, що характеризують фільтраційні властивості, можна подати у вигляді

$$K(x,y,z) = K_r(x,y,z) + K'(x,y,z), \quad (11)$$

де K_r і K' – закономірна і випадкова складові коефіцієнта фільтрації відповідно. Закономірна складова має геолого-структурну основу, а випадкова залежить від похибок вимірювання та браку інформації. Можна виділити декілька квазіоднорідних зон в області фільтрації, у межах кожної задати відхилення параметрів від середніх значень на основі статистичної обробки.

Досить часто на практиці використовуються «ефективні» значення параметрів, які характеризують об'єкт у цілому. Наприклад, можна визначити «ефективний» коефіцієнт фільтрації для значних за площею водоносних пластів, які складаються з різнорідних частин, але в регіональному масштабі розглядаються як єдине ціле.

За наявності інформації щодо закономірних змін властивостей у товщі порід застосовні аналітичні залежності. Наприклад, для коефіцієнта фільтрації до глибин кілька сотень метрів можна використовувати формулу $K(z) = K_0 e^{-\beta z}$, де K_0 – коефіцієнт фільтрації порід поблизу поверхні землі, z – глибина залягання порід, β – емпіричний параметр. Ця залежність суттєво порушується внаслідок ведення гірничих робіт.

Отже, можна прийняти одну з таких схем фільтраційних властивостей:

1) статистичну, коли для параметрів моделі використовуються усереднені значення;

2) трендову, в якій зміна параметрів задана за допомогою карт або аналітичних формул;

3) комплексну, якщо використовуються карти параметрів з діапазонами та середніми значеннями.

Схематизація джерел водного балансу виконується за допомогою критерію подібності для водообміну (8) $\eta_1 = Q_v / Q_h$. Якщо $\eta_1 < 0,1$, то пласт можна розглядати ізольовано, у разі $0,1 < \eta_1 < 10$ вертикальний та горизонтальний потоки домірні, тому необхідно розглядати шарувату схему з перетіканням. При $\eta_1 > 10$ переважає вертикальний водообмін, а бічні межі практично не впливають на фільтрацію.

Джерела живлення можна класифікувати таким чином:

а) інфільтрація на окремих ділянках;

б) глибинне перетікання, в тому числі через «літологічні вікна» – зони порушень та підвищеної проникності водотривкого шару;

в) приплив з поверхневих водотоків та водойм.

Інтенсивність живлення оцінюється за критерієм площинного перетікання (9). Результатом схематизації є визначення області живлення та інтенсивності припливів.

Питання для самоконтролю

1. Що являє собою розрахункова схема?

2. Яким чином уточнюються дані при гідрогеологічній схематизації?

3. Охарактеризуйте умови застосування планових та профільних двовимірних моделей фільтрації.

4. У чому полягають відмінності схематизації дрен і свердловин для: а) плоско-планової, б) профільної схем фільтрації?

5. Як визначити застосовність схеми радіального потоку для конкретних умов?

6. Коли застосовна схема одновимірного потоку? Наведіть приклади.

7. Як схематизуються межі фільтраційного потоку і враховується їхня недосконалість?

8. Чим спричинена фільтраційна неоднорідність? Якими параметрами можна її кількісно оцінити?

9. Як залежить неоднорідність водоносного горизонту від його розмірів?

10. Як враховуються закономірні зміни фільтраційних властивостей при гідрогеологічній схематизації?

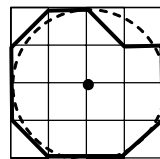
11. Яким чином схематизуються джерела водного балансу?

Задачі

1. Кількісна оцінка однорідності водоносних пластів. Чи можна вважати водоносний горизонт однорідним, якщо п'ять незалежних вимірів провідності T дали такі результати: 200, 220, 240, 195, 235 м²/добу?

Розв'язування. Значення $\ln T$ дорівнюють 5,3; 5,39; 5,48; 5,27; 5,46 відповідно, а їх середнє значення становить 5,38, що відповідає $T_{сер} = 217,25$ м²/добу. Середньоквадратичне відхилення $\sigma_{\ln T} = 0,093$, тому випробуваний пласт можна вважати умовно однорідним.

2. Схематизація структури фільтраційного потоку. Чи застосовна розрахункова схема радіального потоку для області, яка обмежена жирною ламаною лінією, як показано на рисунку? Водоносний горизонт вважати однорідним.



Розв'язування. Для вирішення задачі масштаб не грає ролі, тому використовуються безрозмірні величини. Отже, периметр фігури становить $8 + 4\sqrt{2} \approx 13,64$, її площа – 13. Радіус круга тієї ж площі буде $\sqrt{13/\pi} \approx 2,03$, а його периметр – 12,78. Відношення периметра фігури до периметра круга дорівнює 1,067. Якщо використовується граничне значення 1,10, то цю фігуру можна схематизувати як круг, якщо ж граничне значення дорівнює 1,05, то така схематизація неможлива.

Розділ 4

АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ГЕОФІЛЬТРАЦІЇ

Сутність методу джерел і стоків. Види джерел в задачах гідрогеології, їх фізичний зміст. Аналітичні моделі геофільтрації.

Головною особливістю аналітичних методів є те, що розрахункові залежності записуються у вигляді формул, які містять спеціальні функції, інтеграли і ряди. Формули для розрахунку фільтраційних характеристик виводяться методами математичної фізики, у першу чергу методами джерел, інтегральних перетворень та конформних відображень [2, 14].

Розглянемо більш детально особливості моделювання геофільтрації на прикладі *метода джерел і стоків* [2]. Відповідно до нього фізичному джерелу ставиться у відповідність його математичний аналог, що кількісно характеризує тип, розташування, характер дії. Можна виділити такі *види джерел і стоків*: а) точкові, б) лінійні, в) площинні, г) об'ємні.

Точкові джерела і стоки визначаються координатами та інтенсивністю (чи витратою). Координати джерел є зазвичай фіксованими, інтенсивність їх, як правило, змінюється у часі. Приклад точкового джерела – свердловина в горизонтальному двовимірному потоці. Зміна рівня підземних вод під її впливом розраховується за такими формулами:

а) для усталеного потоку

$$S_0(r) = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{R}{r}; \quad (12)$$

б) для неусталеного потоку

$$S_0(r, t) = -\frac{Q}{4\pi K m t} E_i \left(-\frac{r^2}{4at} \right), \quad (13)$$

де S_0 – зниження; Q – об'ємна витрата; R – радіус впливу свердловини; $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$; (x, y) – координати точки, для якої виконується розрахунок; (x_0, y_0) – координати свердловини; K – коефіцієнт фільтрації, m – середня потужність водоносного горизонту; E_i – інтегральна показникова функція, яку можна обчислювати у програмах комп'ютерної математики;

a – п’езопровідність, $a=T/\mu$; μ – водовіддача; t – час. Залежно від характеру дії (відкачування або нагнітання рідини) свердловина розглядається як джерело ($Q>0$) або стік ($Q<0$).

Лінійні джерела і стоки задаються координатами кінців контуру і питомою інтенсивністю (на одиницю довжини). Вони зазвичай нерухомі, а їхня інтенсивність змінюється з часом і вздовж контуру.

Приклади лінійних джерел (рис. 11, а)

- у двовимірному плановому фільтраційному потоці – горизонтальні дрени, водопроводи та теплотраси, з яких можливі витікання в ґрунт,

- у тривимірному фільтраційному потоці – свердловини.

Питома інтенсивність лінійного джерела і стоку q_l з розмірністю $m^2/\text{добу}$ визначається як відношення $q_l = Q_l/l$, а зміна рівня підземних вод під його впливом розраховується як інтеграл від виразу (12) чи (13) уздовж контуру, заданого кривими або відрізками прямих

$$h_l(x, y, t) = \int_{x_1}^{x_2} q_l(\xi) h(x - \xi, y - f(\xi), t) d\xi = \int_{y_1}^{y_2} q_l(\eta) S_p(x - g(\eta), y - \eta, t) d\eta, \quad (14)$$

де $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ – кінцеві точки лінійного контуру.

Площинні джерела і стоки характеризуються координатами контуру, що обмежує джерело, його площею S , питомою та загальною витратами q_A та Q_A . Питома витрата q_A зазвичай нерівномірна за площею, крім того, вона змінюється у часі. Прикладами площинного джерела у горизонтальному потоці є поле зрошення, хвостосховище, водовідстійник (рис. 11, б). Питома витрата води з такого джерела розраховується як відношення $q_A = Q_A/F_A$, де F_A – його площа, причому q_A має розмірність $m/\text{добу}$. Іноді величину q_A називають техногенною інфільтрацією. Зміна рівня підземних вод під впливом площинного джерела розраховується інтегруванням виразу (12) чи (13) за площею області F_A , обмеженої контуром

$$h_l(x, y, t) = \int_{F_A} q_A(\xi, \eta) h(x - \xi, y - \eta, t) d\xi d\eta. \quad (15)$$

Об’ємні джерела і стоки частіше зустрічаються в задачах міграції у підземних водах. У цьому випадку вони характеризують інтенсивність виділення маси речовини в об’ємі гірських порід.

Прикладом об'ємного джерела є насичені водою поховання і звалища відходів, де відбувається вилуговування речовин. Як об'ємне джерело газу при його міграції через масив вугленосних порід можна розглядати вугільні шари, де виділяється метан. Питома інтенсивність об'ємного джерела або стоку вимірюється у $\text{м}^3/(\text{м}^3 \cdot \text{добу})$ чи $\text{кг}/(\text{м}^3 \cdot \text{добу})$.

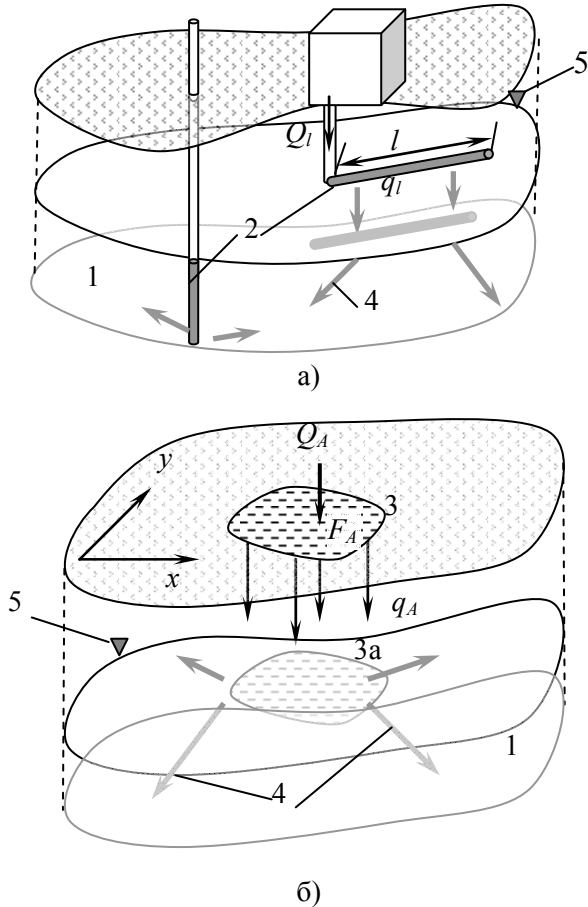


Рис. 11. Схеми лінійних (а) та площинних (б) джерел в області фільтрації: 1 – водоносний горизонт, 2 – лінійні джерела, 3 – площинне джерело, 3а – його проекція на покрівлю водоносного горизонту, 4 – напрямки фільтрації від джерел, 5 – рівень підземних вод

В умовах напірної фільтрації допустимо підсумувати вплив окремих джерел та стоків. Нехай, наприклад, $\Delta H_i(x, y, t)$ – зміна рівня підземних вод під впливом окремого i -го джерела ($i=1, \dots, N$). Тоді загальна зміна рівня підземних вод в області фільтрації в результаті дії всіх N джерел розраховується як сума змін рівня, що відбулися внаслідок дії окремих джерел

$$\Delta H(x, y, t) = \sum_{i=1}^N \Delta H_i(x, y, t). \quad (16)$$

Основні обмеження на застосування аналітичних методів

1. Аналітичні методи в класичному вигляді застосовні лише в областях канонічної форми, тобто в областях, обмежених прямими (у тому числі розташованими під кутом 90°) або дугами кіл і променями, що виходять з центру області. Прикладами таких областей можуть бути пласт-півплощина, пласт-смуга, коло або сектор.

2. За невеликим винятком, аналітичні методи застосовні тільки у разі сталих або спеціально змінюваних значень фільтраційних параметрів. Залежність напору від потужності водоносного горизонту в умовах безнапірної фільтрації ґрунтових вод значно ускладнює її математичний опис і робить неможливим підсумовування впливів окремих джерел, як це зроблено у формулі (16).

Розглянемо більш детально приклади моделей геофільтрації, у яких використовуються аналітичні методи.

1. *Свердловина (точкове джерело) в стаціонарному радіальному потоці.* Якщо у свердловині підтримується усталений рівень води H_0 (рис. 12, а), то приплив до неї за умов безнапірної фільтрації визначається за формулою

$$Q = \pi K \frac{H_R^2 - H_0^2}{\ln(R/r_0)}, \quad (17)$$

де H_R – напір на зовнішній межі, розташованій на відстані R від свердловини; r_0 – радіус свердловини; K – коефіцієнт фільтрації. Зміна рівня води залежно від відстані r до свердловини визначається за формулою

$$H(r) = \sqrt{H_0^2 + (H_R^2 - H_0^2) \frac{\ln(r/r_0)}{\ln(R/r_0)}}. \quad (18)$$

Очевидно, що вираз (18) задовольняє граничні умови $H(0)=H_0$ та $H(R)=H_R$.

Якщо заданий дебіт свердловини Q , яка має координати (x_0, y_0) , то відповідне зниження напору S визначається за формулою (12). Крива депресії, розрахована за формулою (18), більш крута поблизу свердловини, ніж парабола Дюпюї для одновимірної безнапірної течії. Треба зважати на те, що при розрахунку за формулою (12) у безпосередній близькості від свердловини ($r \rightarrow 0$) можна отримати неправильний результат, що пов'язано з діленням на мале число r .

2. *Свердловина (точкове джерело) у напівобмеженому пласті.* Межею пласта є пряма $x = 0$, а область фільтрації – півплощина $x > 0$. На межі $x = 0$ підтримується усталений рівень води:

$$H(0, y) = H_0. \quad (19)$$

Визначимо зниження як $S(x, y) = H_0 - H(x, y)$; тоді $S = 0$ на межі $x = 0$. Для точкового джерела в необмеженій області справедлива формула (12). Розміщуємо симетрично відносно прямої $x = 0$ стік тієї ж інтенсивності протилежного знака (рис. 13, а), тоді сумарний вплив джерела та стоку на межі $x = 0$ дорівнює нулю. Отже, зниження у пласті в правій півплощині визначається за формулою

$$S(x, y) = S_0(x, y) - S_0(-x, y), \quad (20)$$

де $S_0(x, y)$ розраховується за формулою (12). Формула (20) дійсна в області $x > 0$. Підставивши вираз (12) у формулу (20), отримаємо для одиночної свердловини

$$S(x, y) = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{\sqrt{(x+x_0)^2 + (y-y_0)^2}}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}. \quad (21)$$

Якщо потік через межу відсутній (вододіл або непроникна стінка в ґрунті), то симетрично межі $x = 0$ розміщується джерело того самого знака та інтенсивності аналогічно рис. 13, а. Тоді

$$S(x, y) = S_0(x, y) + S_0(-x, y). \quad (22)$$

Для пласта-квадранта (рис. 13, б) зниження рівня підземних вод визначається:

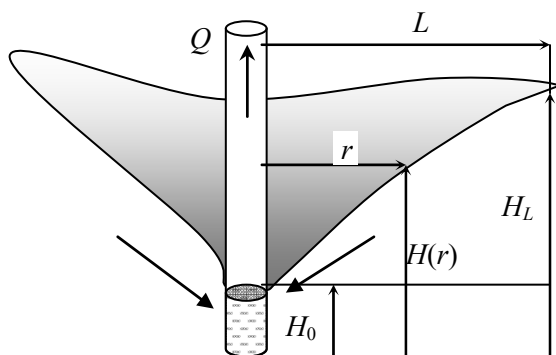
а) для випадку межі з рікою (умова $S=0$)

$$S(x, y) = S_0(x, y) - S_0(-x, y) - S_0(x, -y) + S_0(-x, -y); \quad (23)$$

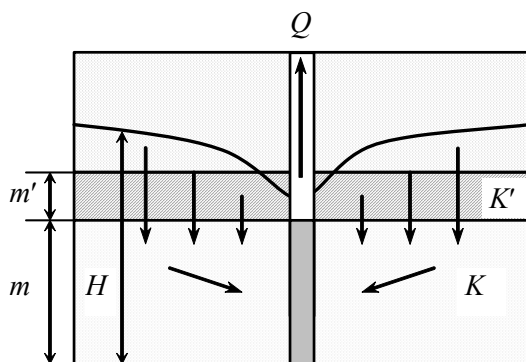
б) для випадку межі з нульовою витратою (умова $\partial S/\partial x = 0$ при $y = 0$ та $\partial S/\partial y = 0$ при $x = 0$)

$$S(x, y) = S_0(x, y) + S_0(-x, y) + S_0(x, -y) - S_0(-x, -y). \quad (24)$$

Для розрахунку зниження в нестационарному режимі у формулах (20), (22) – (24) використовується вираз (13).



а)



б)

Рис. 12. Схеми областей фільтрації без перетікання (а) та з перетіканням через водотривкий шар (б)

3. *Одиночна свердловина у пласті, необмеженому в плані, з перетіканням через водотривкий шар (рис. 12, б). Зниження рівня води розраховується за формулою*

$$S(r) = \frac{Q}{2\pi T} K_0\left(\frac{r}{B}\right), \quad (25)$$

де T – провідність водоносного горизонту, $T=Km$; K та m – його коефіцієнт фільтрації та потужність; K_0 – спеціальна функція (функція Макдональда), яку можна обчислити в системах комп'ютерної математики (додаток 1); $B = \sqrt{Tm'/K'}$; K' та m' – відповідно коефіцієнт фільтрації та потужність водотривкого шару.

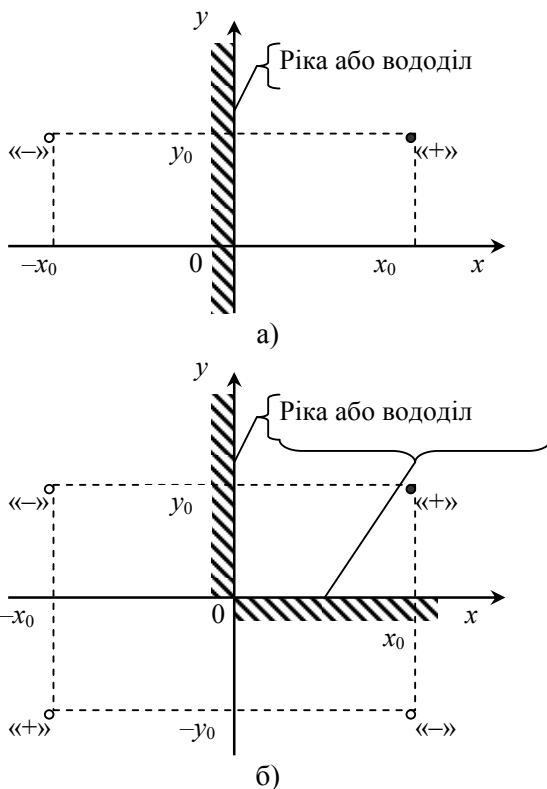


Рис. 13. Схеми областей планової фільтрації:
а) у пласті-півплощині, б) у пласті-квадранті:

- – реальні джерела (стоки), ○ – фіктивні джерела (стоки)

У нестационарному режимі зниження описується формулою [2]:

$$S_n(x, y, t) = \frac{Q}{4\pi T} \int_{u(x,y,t)}^{\infty} \frac{\exp(-\xi - r^2(x, y)/(4B^2\xi))}{\xi} d\xi = \frac{Q}{4\pi T} W\left(u, \frac{r}{B}\right), \quad (26)$$

де $u(x, y, t) = \frac{r^2(x, y)\mu}{4Tt}$, W – так звана функція колодзя або свердловини у пласті з перетіканням.

Для всіх описаних моделей можна підсумовувати вплив окремих свердловин за формулою (16).

Питання для самоконтролю

1. Наведіть приклади точкових та лінійних джерел у дво- та тривимірних моделях геофільтрації.

2. Як змінюється розмірність джерел у разі зміни вимірності області фільтрації? Покажіть це на прикладі окремої свердловини чи дрени.

3. Які існують обмеження на застосування аналітичних методів?

4. У чому полягає принцип суперпозиції? Коли він не може бути застосований?

5. Порівняйте моделі радіальної фільтрації із заданим дебітом і напором на внутрішній межі. Як перетікання впливає на рівень підземних вод?

6. Чи відрізняється модель фільтрації з перетіканням та без нього?

7. Яким чином враховуються межі у схемі точкового джерела (стоку) в пласті-півплощині, на яких задано: а) напір, б) витрату?

8. Як складаються моделі фільтрації від площинних та лінійних джерел?

Задачі

Метою пропонованих задач є оцінювання гідрогеологічних параметрів шляхом зворотного моделювання з використанням аналітичних методів.

1. Визначення фільтраційних параметрів в умовах перетікання з інших горизонтів.

I. Користуючись формулою для розрахунку рівня підземних вод у стаціонарному режимі в умовах перетікання (25), визначити, на якій відстані r від свердловини зниження S становитиме: а) 1 м, б) 3 м. Значення фільтраційних параметрів узяти такими: $Q = 628$ м³/добу, $T = 200$ м²/добу, $m' = 10$ м, $K' = 10^{-4}$ м/добу.

Розв'язування. Формулу (25) запишемо у вигляді

$$K_0\left(\frac{r}{B}\right) = \frac{2\pi T_1 S}{Q}.$$

Підставивши $S = 1$ м та значення інших параметрів, отримаємо

$K_0\left(\frac{r}{B}\right) = 2$. За таблицею (додаток 1) з використанням інтерполяції між окремими значеннями знаходимо, що $K_0(0,155) \approx 2$. Таким чином, $\frac{r}{B} = 0,155$, причому $B = 4472,1$ м, звідки $r = 693,18$ м.

Аналогічно визначається відстань r для зниження $S = 3$ м. У таблиці немає відповідного значення для аргументу функції $K_0(x)$, отже, застосовується формула $K_0(\xi) \approx -\ln(\xi)$, справедлива при малих ξ .

Тоді $\frac{r}{B} \approx \exp\left(\frac{2\pi T S}{Q}\right)$, звідки $r \approx 0,00248 B = 11,08$ м.

II. Використовуючи умови попередньої задачі, визначити, при якому значенні K' зниження S на відстані $r = 100$ м від свердловини становитиме: а) 1 м, б) 3 м. Значення фільтраційних параметрів узяти такими: $Q = 628$ м³/добу, $T = 200$ м²/добу, $m' = 10$ м.

Розв'язування. Аналогічно попередній задачі приходимо до співвідношення $\frac{r}{B} = A = 0,155$. Підставляємо вираз для B і визначаємо невідомий параметр K' :

$$\frac{r}{A} = \sqrt{\frac{K'}{T m'}}, \text{ звідси } K' = \left(\frac{A}{r}\right)^2 T m' = \left(\frac{0,155}{100}\right)^2 T m' \approx 4,8 \cdot 10^{-3} \text{ м/добу.}$$

III. Використовуючи умови задачі I, визначити, при якому значенні m' зниження S на відстані $r = 100$ м від свердловини становитиме: а) 1 м, б) 0,2 м. Значення фільтраційних параметрів узяти такими: $Q = 628$ м³/добу, $T = 200$ м²/добу, $K' = 10^{-4}$ м/добу.

Розв'язування. Задачу вирішують аналогічно попередній, лише з рівняння $\frac{r}{A} = \sqrt{\frac{K'}{T m'}}$ замість K' треба знайти значення m' .

2. Визначення фільтраційних параметрів за відсутності перетікання з інших горизонтів.

I. Користуючись формулою для розрахунку зниження рівня підземних вод у стаціонарному режимі без перетікання (12), визначити, при якому дебіті Q зниження S на відстані $r = 0,2 R$ та $r = 0,5 R$ від свердловини становитиме: а) 1 м, б) 0,2 м. Задати $T = 200$ м²/добу.

Розв'язування. Формулу (12) запишемо у вигляді

$$Q = \frac{2\pi T S}{\ln(R/r)}.$$

Підставивши $S = 1$ м та значення інших параметрів, отримаємо при $r = 0,2 R$ в знаменнику цього виразу $\ln 5$. Тоді $Q = 780,8$ м³/добу. Аналогічно обчислюється дебіт для інших значень зниження та при $r = 0,5 R$.

II. Використовуючи умови попередньої задачі, визначити, за якої провідності T зниження S на відстані $r = 0,2 R$ та $r = 0,5 R$ від свердловини становитиме: а) 1 м, б) 0,2 м. Задати $Q = 314$ м³/добу.

Розв'язування. Задачу вирішують аналогічно попередній, лише з формули (12) необхідно визначити параметр T .

Розділ 5

СКІНЧЕННОРІЗНИЦЕВА МОДЕЛЬ ГЕОФІЛЬТРАЦІЇ

Апроксимація області фільтрації на сітці прямих. Баланс води в розрахунковому блоці сітки. Розв'язання системи різницевих рівнянь. Граничні умови. Етапи скінченнорізницевого моделювання геофільтрації. Порівняння чисельних та аналітичних методів.

Обмежені можливості аналітичних методів зумовили широке розповсюдження в гідрогеологічній практиці низки чисельних моделей. Більшість з них засновані на трьох методах: скінченних різниць, скінченних та граничних елементів. Далі викладена двовимірна планова чисельна модель нестационарної геофільтрації, в якій використовується метод скінченних різниць.

Апроксимація області фільтрації на сітці прямих. Розглядається плановий фільтраційний потік на слабопохилому водотривкому шарі, коли застосовні припущення гідравлічної теорії фільтрації [2, 13] (див. також розділ 3 посібника). Згідно з нею можна усереднювати напір уздовж вертикалі за потужністю водоносного шару, швидкість фільтрації не залежить від вертикальної координати.

Область фільтрації покривається прямими, паралельними осям координат Ox та Oy (рис. 14). Прямокутники, створені перетином прямих, називаються блоками сітки, а їхні центри – вузлами сітки. Серед вузлів і відповідних їм блоків виділяють внутрішні, в яких усі «сусіди» належать області, та граничні, у яких хоча б один «сусід» знаходиться за межами області.

Відстані між прямими (гранями блоків) називаються кроками сітки

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y_j = y_j - y_{j-1}, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M;$$

де x_i та y_j – координати граней блоків.

Вертикальний розмір блоку дорівнює потужності водоносного шару. Отже, геометрично водоносний горизонт зображується у вигляді сукупності паралелепіпедів різної висоти, ширини та довжини, що торкаються сусідніх блоків боковими гранями. Всі параметри моделі визначаються лише у вузлах сітки і ці значення приписуються всьому блоку. Незважаючи на таке спрощення, модель дозволяє відтворювати складну структуру та форму області,

змінюючи параметри у різних вузлах сітки, а також розміри блоків [2, 9, 10].

Більш дрібна сітка доцільна для зон різкої зміни фільтраційних властивостей та швидкості фільтрації (наприклад, поблизу свердловин або меж області); у відносно однорідних зонах можна використовувати крупну сітку. Чим менші кроки сітки, тим детальнішою є модель. Разом з тим слід уникати надмірного збільшення кількості вузлів, оскільки це ускладнює розрахунок з точки зору отримання стабільного результату, а також часто не може бути забезпечено вхідними даними з потрібною деталізацією.

Увесь проміжок часу τ ділиться інтервалами (часовими кроками) тривалістю Δt_k , такими що

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}, \quad k = 1, \dots, Z, \quad t_0 = 0, \quad t_Z = \tau.$$

Всі значення розрахованих величин та параметрів у фіксований момент часу називаються часовим шаром.

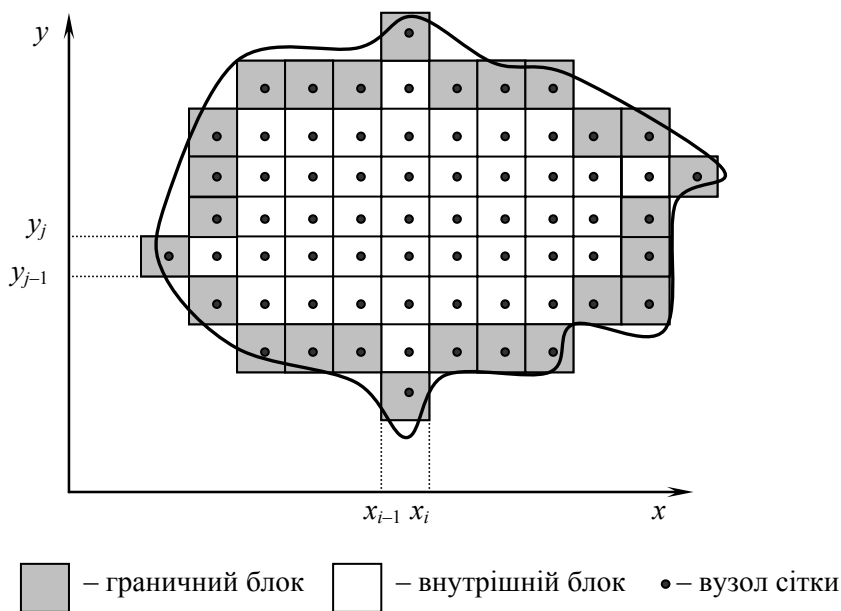


Рис. 14. Скінченнорізницева апроксимація області фільтрації

Баланс води в розрахунковому блоці сітки. Розглянемо довільний блок сітки, позначивши його індексом «0», а сусідні – індексами «1», «2», «3», «4» (рис. 15). Напори (рівні) підземних вод у блоках позначимо через H_0, H_1, H_2, H_3, H_4 , коефіцієнти фільтрації – K_0, K_1, K_2, K_3, K_4 , товщини водоносного горизонту – відповідно m_0, m_1, m_2, m_3, m_4 , розміри всіх блоків у плані – Δx та Δy .

Згідно із законом Дарсі потік води з лівого блоку з індексом «1» до центрального з індексом «0» визначається за формулою

$$Q_{1,0} = -K_{1,0}F_{1,0}I_{1,0} = -K_{1,0}m_{1,0}\Delta y \frac{H_0 - H_1}{\Delta x}, \quad (27)$$

де $K_{1,0}$ та $m_{1,0}$ – відповідно усереднені значення коефіцієнта фільтрації та товщини водоносного горизонту для блоків «0» та «1».

Існує декілька формул для усереднення значень параметрів на блоках сітки [9]. Найбільш прийнятною, відповідною фізичній природі фільтрації та найчастіше використовуваною вважається така

$$K_{1,0}m_{1,0} = T_{1,0} = \frac{2T_0T_1}{T_0 + T_1}, \quad (28)$$

де $T_0 = K_0m_0$, $T_1 = K_1m_1$.

Аналогічно формулі (27) визначаються потоки води з блоку «2» до центрального блоку та з нього до блоків «3» та «4»:

$$Q_{2,0} = -K_{2,0}F_{2,0}I_{2,0} = -T_{2,0} \frac{H_0 - H_2}{\Delta y}, \quad (29)$$

$$Q_{0,3} = -K_{3,0}F_{3,0}I_{0,3} = -T_{3,0} \frac{H_3 - H_0}{\Delta x}, \quad (30)$$

$$Q_{0,4} = -K_{4,0}F_{4,0}I_{0,4} = -T_{4,0} \frac{H_4 - H_0}{\Delta y}. \quad (31)$$

Потік води зверху за рахунок інфільтрації у безнапірний водоносний горизонт визначається як

$$Q_v = w\Delta x\Delta y. \quad (32)$$

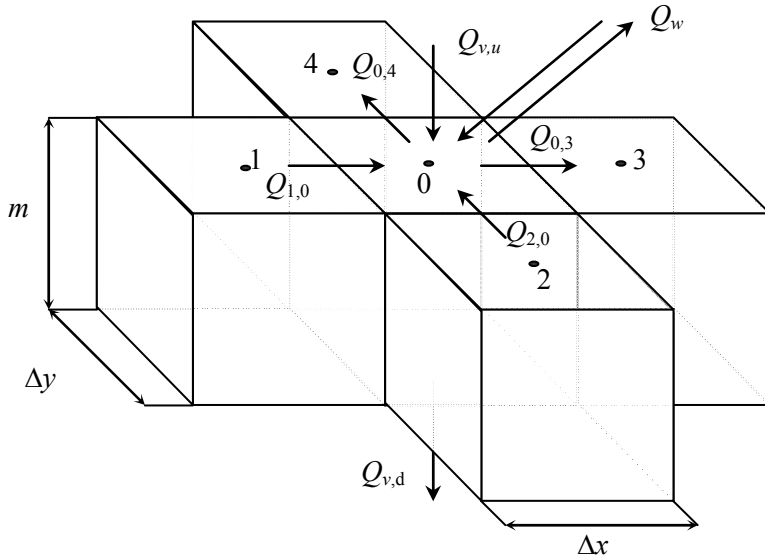


Рис. 15. Схема до визначення балансу підземних вод у блоці скінченнорізницевої сітки

У разі перетікання по площі з іншого водоносного горизонту вертикальний потік визначається так:

$$Q_{v,d} = -K'_0 \Delta x \Delta y \frac{H_0 - H_{0,d}}{m'_0} \quad (33)$$

або

$$Q_{v,u} = -K'_0 \Delta x \Delta y \frac{H_{0,u} - H_0}{m'_0}, \quad (34)$$

де K'_0 та m'_0 – відповідно коефіцієнт фільтрації та товщина водотривкого шару, $H_{0,u}$ та $H_{0,d}$ – напір у верхньому або нижньому водоносному горизонті. Вертикальні потоки зверху визначаються за однією з формул (32) чи (33), потік до нижнього водоносного горизонту – за формулою (34).

До складових балансу в центральному блоці слід додати надходження або відбір води внаслідок роботи свердловини дебітом Q_w .

Отже, рівняння балансу води в блоці скінченнорізницевої сітки на проміжку часу Δt_k записується так:

а) для безнапірного потоку

$$Q_{1,0} + Q_{2,0} - Q_{0,3} - Q_{0,4} + Q_{v,1} - Q_{v,2} + Q_w = n_0 \Delta x \Delta y \frac{H_0^{(k)} - H_0^{(k-1)}}{\Delta t_k}, \quad (35)$$

б) для напірного потоку

$$Q_{1,0} + Q_{2,0} - Q_{0,3} - Q_{0,4} + Q_{v,1} - Q_{v,2} + Q_w = \eta_0 \Delta x \Delta y m_0 \frac{H_0^{(k)} - H_0^{(k-1)}}{\Delta t_k}. \quad (36)$$

Тут n_0 – пористість порід у центральному блоці; η_0 – значення коефіцієнта пружності пласта, зведене до висоти водного стовпа у центральному блоці, $\eta_0 = (n_0 \beta_f + (1 - n_0) \beta_s) \rho g$; β_f та β_s – відповідно стисливості рідини та скелета ґрунту; ρ – густина рідини. Всі члени рівнянь (35) та (36) мають розмірність об'ємної витрати.

У разі безнапірного потоку товщина водоносного шару залежить від рівня підземних вод

$$m = H - b, \quad (37)$$

де b – позначка (висотне положення) підшови водоносного горизонту. Для напірного потоку параметр m не залежить від H і визначається лише різницею висотного положення покрівлі та підшови пласта.

Підставивши (27), (29) – (34) до рівнянь (35) та (36) і зменшуючи розміри блоку до нескінченно малих величин ($\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$), перейдемо від різницевих відношень до похідних. Тоді рівняння балансу запишеться так:

а) для безнапірного пласта

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(Km \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(Km \frac{\partial H}{\partial y} \right) \right) + w + \sum_{i=1} Q_i = \mu \frac{\partial H}{\partial t}; \quad (38)$$

б) для напірного пласта

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(Km \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(Km \frac{\partial H}{\partial y} \right) \right) + \frac{K'}{m'} (H - H_d) + \sum_{i=1} Q_i = \eta m \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (39)$$

Тут Q_i – додаткові потоки води до центрального блоку від точкових, лінійних або площинних джерел, розташованих у його межах. Похідним у рівняннях (38), (39) відповідають скінченні різниці розрахованої величини в центрах блоків, що й дало назву методу.

Розв'язування системи різницевих рівнянь. Алгоритм розрахунку нестационарної фільтрації полягає у послідовному визначенні напору H на наступному часовому шарі при $t = t_k$, виходячи з відомих значень напору на поточному часовому шарі при $t = t_{k-1}$. Розроблено декілька схем такого розрахунку [9, 10], які відрізняються способами апроксимації похідної за часом у рівняннях (38) та (39). Найбільш відомі з них називають явною та неявною схемами (рис. 16).

Фактично ці схеми відрізняються тим, на якому часовому шарі визначаються потоки води $Q_{1,0}$, $Q_{2,0}$, $Q_{0,3}$, $Q_{0,4}$, $Q_{v,1}$, $Q_{v,2}$ та Q_w . Якщо вони обчислюються на поточному часовому шарі при $t = t_{k-1}$, то після підстановки виразів (27) – (34) до (35) чи (36) та зведення подібних отримуємо рівняння явної схеми, яке пов'язує значення напору в п'яти блоках

$$A H_1^{(k-1)} + B H_2^{(k-1)} + C H_0^{(k-1)} + D H_3^{(k-1)} + E H_4^{(k-1)} + Q_{v,\Sigma}^{(k-1)} = F H_0^{(k)}, \quad (40)$$

де коефіцієнти A , B , C , D , E та F залежать від кроку сітки, часу та фільтраційних параметрів, індекси « $k-1$ » та « k » позначають часовий шар, $Q_{v,\Sigma}^{(k-1)}$ – сумарний потік до блоку за рахунок інфільтраційного живлення, вертикального перетікання між водоносними шарами та водовідбору (нагнітання води).

Якщо ж потоки води до центрального блоку та витікання з нього обчислюються на наступному часовому шарі при $t = t_k$, то після підстановки виразів (27) – (34) до (35) чи (36) і зведення подібних отримуємо рівняння неявної схеми:

$$A' H_1^{(k)} + B' H_2^{(k)} + C' H_0^{(k)} + D' H_3^{(k)} + E' H_4^{(k)} + Q_{v,\Sigma}^{(k)} = F' H_0^{(k-1)}, \quad (41)$$

де коефіцієнти зі штрихом відрізняються від аналогічних у рівнянні (40).

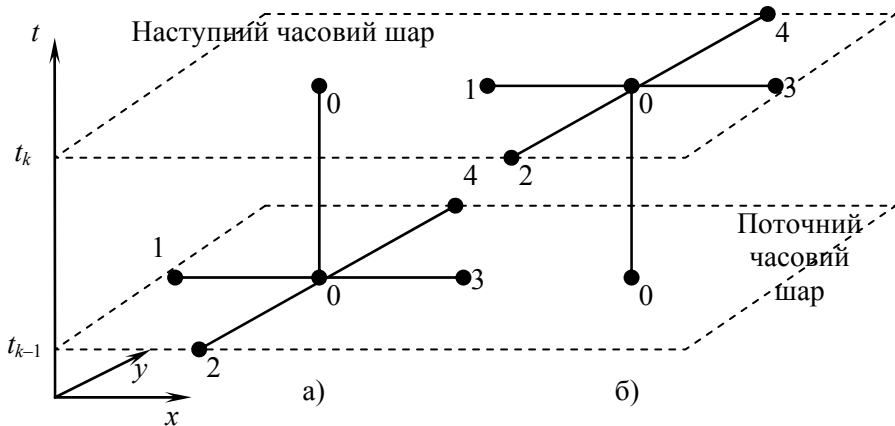


Рис. 16. Шаблиони явної (а) та неявної (б) схем розрахунку фільтраційного напору методом скінченних різниць

Використовуючи рівняння явної схеми (40), можна безпосередньо обчислити напір у центральному блоці в наступний момент часу. Для неявної схеми (41) необхідно розв'язувати систему алгебраїчних рівнянь, невідомими в якій є значення напору в наступний момент часу в усіх блоках, крім тих, де H однозначно заданий.

Рівняння типу (40) чи (41) розв'язуються послідовно для всіх часових шарів від $t = t_0$ до $t = \tau$, причому кожний раз наступний часовий шар, де вже визначений напір, стає поточним. Тривалість кроку у часі зазвичай змінюється: зменшується одразу ж після різких змін у часі фільтраційних параметрів та граничних умов та збільшується у періоди, коли значення цих параметрів відносно стабільні.

Явна схема як алгоритм значно простіша, але має суттєві обмеження на розмір кроків сітки. Так, у разі рівномірної сітки $\Delta x = \Delta y = l$ умова стійкості розрахунку за явною схемою визначається співвідношенням

$$\Delta t \leq l^2 / 4a, \quad (42)$$

де $a = Km/\mu$ для безнапірного потоку, $a = K/\eta$ для напірного потоку. Отже, крок за часом не можна задавати довільно. Так, якщо

$a = 500 \text{ м}^2/\text{добу}$, то для кроку сітки $\Delta x = \Delta y = 50 \text{ м}$ Δt не може перевищувати 1,25 діб. Це означає суттєве збільшення кількості обчислень, що особливо відчутно при виконанні довгострокових прогнозів та моделювання складних гідрогеологічних об'єктів протягом тривалого часу. Слід зважати, що похибка розрахунку метода скінченних різниць пропорційна t^2 , тому збільшення кроку сітки заради збільшення кроку в часі часто неприпустимо з міркувань точності моделювання.

На відміну від явної схеми, у неявній на попередньому кроці за часом відомий лише напір у центральному блоці, а всі інші значення розраховуються. У цій схемі відсутнє обмеження (42) щодо відповідності Δt певному кроку сітки, неявна схема є безумовно стійкою і використовується набагато частіше, ніж явна. Поширеною на практиці є локально-одновимірна схема з чергуванням розрахунків уздовж осей Ox та Oy на кожному кроці у часі.

Щодо моделювання фільтрації у двох водоносних горизонтах, розділених водотривким шаром, існують два підходи. Відповідно до одного з них, слабопроникні прошарки не моделюються, а напір у них не розраховується. Тоді вирішується система рівнянь вигляду (38) або (39) для кожного водоносного горизонту [9, 10]. Згідно з другим підходом, який реалізований у програмі **ModFlow**, що використовується для виконання лабораторної роботи №1, розрахунки напору проводяться також і у двох водотривких шарах. Це більш відповідає реальності, але потребує ретельного визначення вертикальної проникності у всіх шарах – у водопроникному і водотривких.

Граничні умови. На межах області фільтрації можуть задаватися змінні у часі й просторі (уздовж певного контуру або на поверхні):

- 1) напір (рівень) підземних вод,
- 2) їхня витрата,
- 3) співвідношення між напором і витратою.

Умова першого роду відповідає безпосередньому та довершеному контакту з річкою, великим ставком, тобто об'єктами, розміри яких порівняні з розмірами області фільтрації. Вважається, що рівень підземних вод у водоносному горизонті на такій межі еквівалентний рівню води h_r у таких об'єктах, який може змінюватись у часі (протягом року або тривалішого періоду).

Умова другого роду ставиться переважно у внутрішніх блоках з додатковими джерелами (свердловини, техногенне інфільтраційне живлення з каналів, ставків-накопичувачів, хвостосховищ). Витрата води, що надходить з лінійних та площинних джерел, розраховується відповідно за формулами

$$Q_l = q_l l_b, \quad Q_F = q_F F_b, \quad (43)$$

де q_l, q_F – питома витрата з лінійного та площинного джерела, l_b, F_b – їхня сумарна довжина та площа у межах блоку. Дебіт задається безпосередньо до рівняння балансу води в блоці, де розташована свердловина.

Умова другого роду може ставитися на межі з нульовою витратою ($Q = 0$), де знаходиться, наприклад, вододіл, лінія течії, непроникна стінка в ґрунті.

Умова третього роду записується співвідношенням

$$K \frac{\partial H}{\partial s} = \alpha(H - H_r) \quad \text{або} \quad \frac{\partial H}{\partial s} = \Phi(H - H_r), \quad (44)$$

де s – локальна координата, перпендикулярна межі області фільтрації, Φ – коефіцієнт, що враховує проникність відкладів під руслом або недовершеність межі (рис. 9), $\Phi = \alpha/K$.

Геометрична схематизація меж проводиться виходячи з умови максимальної близькості центрів граничних блоків до реальної межі області, де заданий напір чи витрата. Існують способи врахування віддалених меж (вододілу, ріки), коли неможливо сумістити їх з межею модельованої області.

Схематизація неоднорідної структури області, апроксимація граничних та початкових умов, розв'язування системи рівнянь та оформлення результатів у графічному вигляді виконуються за окремими алгоритмами. Ці етапи можуть бути ефективно здійснені в рамках загальної схеми (рис. 17) за допомогою спеціального програмного забезпечення. Одним з таких пакетів є Visual ModFlow, в якому виконується лабораторна робота №1.

Порівняння чисельних та аналітичних методів моделювання дозволяє виділити такі відмінності:

1. Аналітичні методи ґрунтуються на формулах, записаних у вигляді елементарних, спеціальних функцій, їхніх сум та інтегралів. Чисельні методи передбачають використання певних алгоритмів розрахунку.

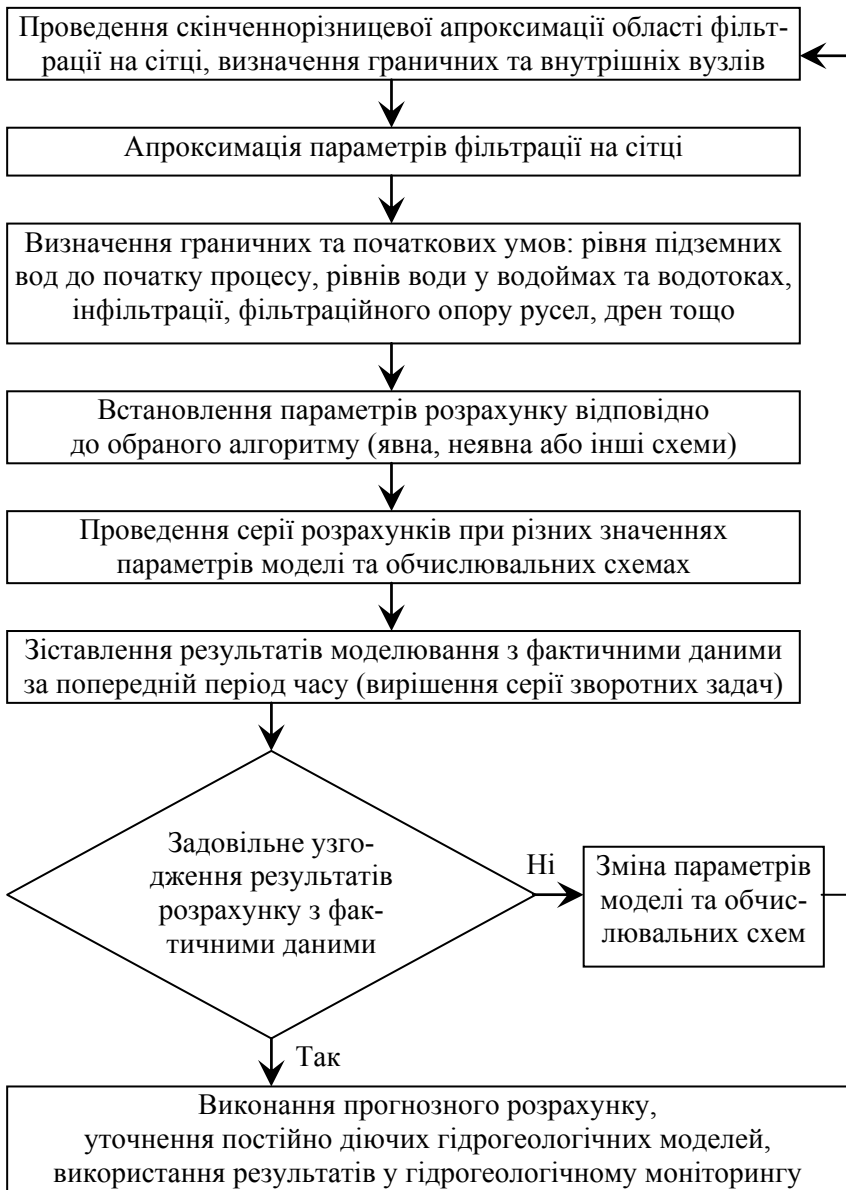


Рис. 17. Етапи скінченнорізницевого моделювання геофільтрації

2. Чисельні методи дозволяють визначати рівень підземних вод лише в центрах блоків, а швидкість фільтрації – на межах блоків, тоді як аналітичні методи дозволяють виконати розрахунок цих величин у будь-якій точці області фільтрації.

3. Чисельні методи, на відміну від аналітичних, мають похибку, пов'язану з апроксимацією диференціальних рівнянь фільтрації на сітці.

4. Чисельні методи дозволяють моделювати фільтрацію в областях складної форми і структури, що є доцільним за умови багат шарової структури області, її достатньої вивченості, а також суттєвої неоднорідності в плані. Аналітичні методи доцільно застосовувати для попередньої оцінки недостатньо вивчених об'єктів, а також у простих гідрогеологічних умовах.

Питання для самоконтролю

1. Охарактеризуйте вхідні дані, необхідні для скінченно-різницевого моделювання фільтрації.

2. Як будується сітка при скінченно-різницевому моделюванні? Охарактеризуйте її елементи.

3. Наведіть складові балансу води в блоці скінченно-різницевої сітки і дайте характеристику кожному.

4. Як проводиться часова дискретизація при скінченно-різницевому моделюванні? Визначте різницю між явною та неявною схемами.

5. У яких випадках доцільно використовувати чисельні та в яких аналітичні методи моделювання?

6. Які етапи виконуються при чисельному моделюванні геофільтрації?

7. У чому полягають переваги та недоліки аналітичних і чисельних методів моделювання?

Задача

1. На основі балансу води в блоці скінченно-різницевої сітки розміром 100×100 м визначити зміну рівня підземних вод за добу. Початкові рівні в сусідніх блоках H_1, \dots, H_4 дорівнюють 102, 101, 103

та 99 м, позначки водотриву b_1, \dots, b_4 – відповідно 86, 87, 84 та 88 м, коефіцієнти фільтрації – 1, 2, 1,5 та 2 м/добу. Початковий рівень у центральному блоці $H_0 = 100$ м, позначка водотривкового шару в ньому $b_0 = 85$ м, коефіцієнт фільтрації $K_0 = 1$ м/добу. Пористість $n = 0,15$, інтенсивність інфільтрації $w = 0,8$ мм/добу.

Розв'язування. Для наочності занесемо дані задачі до таблиці. Усереднені провідності $T_{i,0}$ обчислені для блоків «1» – «4» за формулою (28).

Номер блоку	H , м	b , м	m , м	K , м/добу	T , м ² /добу	$T_{i,0}$, м ² /добу
0	100	85	15	1	15	-
1	102	86	16	2	32	20,43
2	101	87	14	1,5	21	17,50
3	103	84	19	1	19	16,76
4	99	83	16	2	32	20,43

Використовуючи рівняння (27), (29) – (33), визначимо всі припливи до центрального блоку. Для бокових витрат маємо

$$Q_{1,0} = -T_{1,0} \Delta y \frac{H_0 - H_1}{\Delta x} = -20,43 \cdot 100 \frac{100 - 102}{100} = 40,86 \text{ м}^3/\text{добу},$$

$$Q_{2,0} = -T_{2,0} \Delta y \frac{H_0 - H_2}{\Delta x} = -17,5 \cdot 100 \frac{100 - 101}{100} = 17,5 \text{ м}^3/\text{добу},$$

$$Q_{0,3} = -T_{3,0} \Delta y \frac{H_3 - H_0}{\Delta x} = 16,76 \cdot 100 \frac{103 - 100}{100} = 50,29 \text{ м}^3/\text{добу},$$

$$Q_{0,4} = -T_{4,0} \Delta y \frac{H_4 - H_0}{\Delta x} = 20,43 \cdot 100 \frac{99 - 100}{100} = -20,43 \text{ м}^3/\text{добу}.$$

Інфільтраційне живлення знайдемо за формулою (32)

$$Q_v = w \Delta x \Delta y = 0,0008 \cdot 100 \cdot 100 = 8 \text{ м}^3/\text{добу}.$$

Сума всіх припливів до блоку дорівнює 96,22 м³/добу. За рівнянням явної схеми (40) визначаємо зміну рівня підземних вод за добу

$$\Delta H_0 = \frac{\Delta t}{n_0 \Delta x \Delta y} (\sum Q_{i,0} + Q_{v,1}) = \frac{1}{0,15 \cdot 100 \cdot 100} 96,22 = 0,0641 \text{ м}.$$

Розділ 6

ВІРОГІДНІСТЬ І ТОЧНІСТЬ МОДЕЛЮВАННЯ

Вірогідність моделювання. Похибки моделювання, їхні джерела. Метод факторно-діапазонного аналізу. Оцінка точності моделювання.

Вірогідність і точність моделювання в гідрогеології визначається дещо іншим чином, ніж у технічних дисциплінах. Для приладів та обладнання зазвичай можна вказати інтервали, в яких мають знаходитися результати розрахунку; при цьому більшість факторів і параметрів відомі й задані з достатньою точністю. У природних умовах діє багато чинників, але лише деякі з них можна врахувати, а вплив окремих факторів неможливо достовірно оцінити, і тому їх доцільно взагалі відкинути при складанні моделей.

Вірогідна модель повинна за всіма врахованими факторами якнайближче до фактичних даних описувати реальний об'єкт і забезпечувати прогноз із заданою точністю. У цьому сенсі виділяють інженерну та адекватну моделі [5, 6].

Інженерна модель дає прогноз з певним наближенням, частіше з перевищенням розрахованих показників. Наприклад, стосовно процесу підтоплення це означає, що на основі інженерної моделі можуть бути визначені завищені оцінки максимального підйому ґрунтових вод, які фактично не будуть досягнуті. Цінність таких результатів полягає у використанні цих значень як достовірної оцінки максимального підйому ґрунтових вод, що є необхідним для обґрунтування інженерного захисту підтоплених територій.

Адекватна модель повинна максимально точно і повно відтворювати реальний об'єкт (процес). Для цього при моделюванні доцільно визначити діапазони параметрів і граничних значень, яким відповідатимуть «песимістичний» та «оптимістичний» сценарії розвитку. Так, за умови мінімального значення водовіддачі відбудеться максимальний підйом ґрунтових вод, тобто з точки зору підтоплення мінімальна водовіддача відповідає «песимістичному» сценарію. З іншого боку, максимальні значення коефіцієнта фільтрації сприятимуть кращому дренаванню територій і мінімізації підйому ґрунтових вод. Тому з точки зору підтоплення це означатиме «оптимістичний» сценарій. Фактично рівень підземних

вод буде знаходитись у межах, визначених за «песимістичним» та «оптимістичним» сценаріями. Тому, чим менше розкид значень параметрів моделі, тим більше результати моделювання наближаються до «реалістичного» сценарію, а сама модель стає більш адекватною відтворюваному процесу. Перевірка істинності моделі та її адекватності називається *верифікацією*.

Похибки моделювання мають бути мінімізованими в адекватній моделі, хоча повністю уникнути їх неможливо на всіх етапах складання та застосування моделі (рис. 18).

Неадекватність уявлень про об'єкт виникає внаслідок неврахування окремих чинників: у разі нехтування перетіканням через водотривкий шар. Наближеність математичного апарату може бути зумовлена, наприклад, відхиленнями від закону Дарсі, які не враховуються в класичній фільтраційній моделі. Похибки за рахунок геометричної схематизації виникають через спрощення структури потоку або його меж.

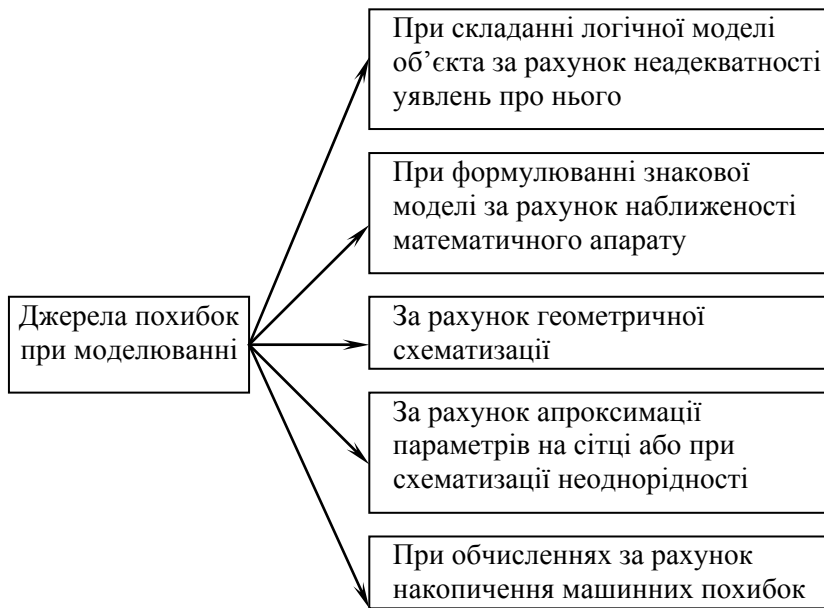


Рис. 18. Причини похибок моделювання

Усереднення фільтраційних параметрів на сітці також є джерелом похибок, тому при моделюванні геофільтрації найчастіше використовується формула (28), яка більше відповідає фізичній природі процесу і мінімізує похибку апроксимації на сітці. Основні похибки моделювання зумовлені неправильними уявленнями про процес і об'єкт на етапі формулювання моделі, неадекватністю прийнятої знакової моделі, а також неправильними значеннями фільтраційних параметрів за рахунок їх грубої апроксимації.

Для оцінки впливу похибок використовується *метод факторно-діапазонного аналізу* [5, 6]. Як фактори розглядаються будь-які параметри, для яких можна визначити реальні діапазони їх змін, беручи до уваги умови гідрогеологічного об'єкта. У межах цих діапазонів встановлюється або оцінюється похибка розрахованих величин напору, мінералізації тощо. Приклад використання такого підходу продемонстрований у задачі 2 цього розділу.

Перевірка точності результатів виконується в два етапи:

1) під час розробки моделі і чисельного алгоритму встановлюється їхня фізико-математична коректність з точки зору дотримання законів збереження маси, енергії, положень гідростатики й гідродинаміки та ін.;

2) при застосуванні моделі натурні та експериментальні дані зіставляються з результатами розрахунку.

На практиці часто вважається, що хороший або задовільний збіг розрахованих та фактичних значень у більшості контрольних точок є ознакою достатньої точності моделювання. Однак це далеко не так, оскільки: а) при цьому збіг може бути досягнутий не у всіх точках і лише в окремі моменти часу, б) розрахований розподіл параметрів може бути нестійким до вхідних даних і сильно коливатися через їхні зміни; в) збіг може бути досягнутий лише відповідно до окремих величин.

За наявності суттєвого розкиду значень параметрів можливий інший підхід. Спочатку визначаються тренди або середні значення і відповідно до них виконується середньоймовірний прогноз. Далі з урахуванням функції розподілу певного параметра (наприклад коефіцієнта фільтрації) як випадкової величини будується розподіл розрахованої величини (наприклад напору) в заданих точках. Для цих точок в області фільтрації і кожного моменту часу можна визначити усереднені значення шуканої величини та їх статистичні

відхилення, це дозволить кількісно оцінити точність і надійність моделювання. Очевидно, що збільшенню середньоквадратичного відхилення, тобто розкиду розрахованого значення параметра відповідає менша вірогідність моделювання.

Оцінка точності моделювання за експериментальними даними. Припустімо, що результати вимірювань деякої величини P наявні для системи N точок у k моментів часу: $P_{ik}^{(\text{exp})}$, $i=1,\dots,N$, $k=1,\dots,K_t$. Позначимо через $P_{ik}^{(\text{mod})}$ значення даного параметра, отримані в результаті моделювання в тих самих пунктах і в ті самі моменти часу, причому $P_{ik}^{(\text{exp})} > 0$. Тоді для будь-якого моменту часу t_k абсолютну і відносну похибку параметра за всіма контрольними точками можна оцінити за формулами

$$\varepsilon_{k,abs} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (P_{ik}^{(\text{exp})} - P_{ik}^{(\text{mod})})^2}, \quad \varepsilon_{k,rel} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|P_{ik}^{(\text{exp})} - P_{ik}^{(\text{mod})}|}{P_{ik}^{(\text{exp})}}. \quad (45)$$

Більш вірогідними є зважені оцінки, побудовані з урахуванням особливостей області, часу, зони впливу пункту спостережень, точності вимірювань. Так, у наведеній схемі (рис. 19) більш важливими будуть виміри у точках «2», «4», «5» та «6» із зони «А», менш важливими – у точках «3» та «7» із зони «Б», найменш важливими – у точках «1» та «8» із зони «В». Межі всіх зон, що змінюються у часі, доцільно визначати шляхом моделювання із залученням гідрогеологічної інформації стосовно структури області фільтрації.

Такі оцінки подібні до формул (45), у яких всі доданки у сумі помножені на коефіцієнт ρ_{ik} ($0 < \rho_{ik} < 1$), що враховує важливість і вірогідність експериментальних даних в i -му пункті спостереження у k -й момент часу.

$$\varepsilon_{k,abs} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \rho_{ik} (P_{ik}^{(\text{exp})} - P_{ik}^{(\text{mod})})^2}, \quad \varepsilon_{k,rel} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \rho_{ik} \frac{|P_{ik}^{(\text{exp})} - P_{ik}^{(\text{mod})}|}{P_{ik}^{(\text{exp})}}.$$

Можна визначити також середню похибку $\bar{\varepsilon}$ за весь період розрахунку:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{K_t} \sum_{k=1}^{K_t} \varepsilon_k. \quad (46)$$

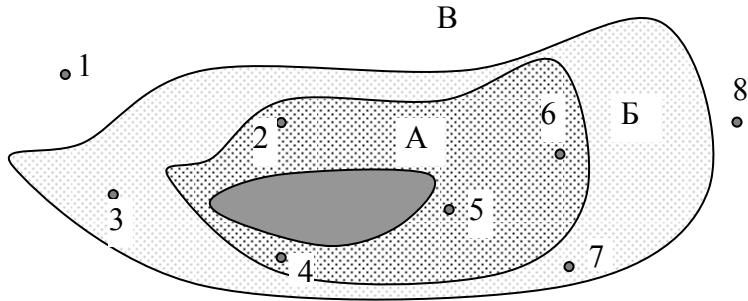


Рис. 19. Приклад мережі контрольних точок для верифікації моделі:
 ■ – об’єкт, А, Б, В – зони його впливу, визначені залежно від важливості вимірів для верифікації; 1, 2, ... 8 – контрольні точки

Для зменшення величин ε_k та $\bar{\varepsilon}$ необхідно змінювати параметри моделі. Не існує загального алгоритму зміни фільтраційних параметрів для зменшення похибок моделювання; для цього використовуються конкретні прийоми. Так, можна зіставляти з фактичним розрахований рівень підземних вод, що отриманий при різних кроках сітки та відхиленнях фільтраційних параметрів. Для досягнення надійного результату важливий цілеспрямований пошук та досвід фахівця, який виконує моделювання.

Питання для самоконтролю

1. Чим відрізняється достовірність моделювання та вимоги до його точності для технологічних і природно-технічних систем?
2. Які джерела похибок при моделюванні?
3. Яким чином перевіряється адекватність моделей природних об’єктів?
4. Охарактеризуйте способи перевірки коректності моделювання та достовірності результатів. Наведіть приклад.
5. Як оцінити точність моделі за даними спостережень?
6. У чому полягає різниця між поняттями: «вірогідна», «інженерна» та «адекватна модель»? Наведіть приклади.

7. Продемонструйте на прикладі розрахунку зниження рівня підземних вод оцінку похибки методом факторно-діапазонного аналізу.

8. Які моделі більш достовірні: з точно визначеними чи випадковими значеннями параметрів?

Задачі

1. Оцінка точності результатів моделювання. Заміряні в свердловині значення рівня підземних вод у різні моменти часу склали 101; 102,2; 103,4; 101,3 та 109,2 м. Згідно з першим варіантом моделювання отримані такі значення у відповідні моменти часу: 101; 102,3; 103,0; 102,5 та 107,2 м; згідно з другим: 100; 100,2; 104; 101 та 108 м. Який варіант моделювання краще відповідає фактичним даним?

Розв'язування. Згідно з формулою (45) похибка моделювання визначається як середньоквадратичне відхилення між розрахованими та експериментальними даними. Для першого варіанта моделювання його значення дорівнює 1,18 м, для другого – 1,31 м. Отже перший варіант краще відповідає фактичним даним.

2. Оцінка чутливості моделей з використанням факторно-діапазонного аналізу.

I. Користуючись формулою (25) для розрахунку рівня підземних вод у стаціонарному режимі з перетіканням з інших водоносних горизонтів, визначити, з якою абсолютною та відносною похибкою буде обчислено зниження S на відстані r від свердловини: а) 100 м, б) 500 м. Задано такі параметри: $Q = 628 \text{ м}^3/\text{добу}$, $T = 200 \text{ м}^2/\text{добу}$, $m' = 10 \pm 5$ м, $K' = 10^{-4}$ м/добу.

Розв'язування. Визначимо зниження S за формулою (25) при середньому, мінімальному та максимальному значенні товщини водотривкого шару m' : 10, 5 та 15 м. Позначимо через S_0 зниження, розраховане при $m' = 10$ м.

Результати розрахунків для $r = 100$ м подано в табличному вигляді.

$m', \text{ м}$	$B, \text{ м}$	$S, \text{ м}$	Відхилення від $S_0, \text{ м}$	Відхилення від $S_0, \%$
10	4472,1	1,96	0	0
5	3162,3	1,79	-0,173	-8,84
15	5477,2	2,06	0,101	5,17

Отже, для заданого діапазону змін товщини водотривкого шару $m'=10\pm 5$ м максимальне абсолютне відхилення розрахованого зниження складе 0,173 м, а відносне буде дорівнювати -8,84%.

Аналогічно виконуються оцінки діапазону зниження у разі змін інших фільтраційних параметрів (провідності та коефіцієнта фільтрації водотривкого шару).

II. Користуючись формулою (12) для розрахунку рівня підземних вод у стаціонарному режимі без перетікання з інших водоносних горизонтів, визначити, з якою абсолютною та відносною похибкою буде обчислено зниження S на відстані r від свердловини: а) $0,2 R$, б) $0,5 R$. Задано такі значення параметрів: $Q = 628 \text{ м}^3/\text{добу}$, $T = 200\pm 25 \text{ м}^2/\text{добу}$.

Розв'язування. Визначимо зниження S за формулою (12) при середньому, мінімальному та максимальному значеннях провідності водоносного горизонту T : 200, 175 та $225 \text{ м}^2/\text{добу}$. Позначимо S_0 як зниження, розраховане при $T = 200 \text{ м}^2/\text{добу}$. Результати розрахунків для $r = 0,2 R$ подано в табличному вигляді.

$T, \text{ м}^2/\text{добу}$	$S, \text{ м}$	Відхилення від $S_0, \text{ м}$	Відхилення від $S_0, \%$
200	0,805	0	0
175	0,920	0,115	14,3
225	0,715	-0,089	-11,1

Отже, для заданого діапазону змін провідності водоносного горизонту $T = 200\pm 25 \text{ м}^2/\text{добу}$ максимальне абсолютне відхилення розрахованого зниження складе 0,115 м, а відносне буде дорівнювати 14,3%.

Розділ 7

МОДЕЛЮВАННЯ ЯК МЕТОД ПРОГНОЗУВАННЯ

Класифікація прогнозів, їхні ознаки. Методи прогнозування.

Як зазначалось у розділі 1, гідрогеологічні моделі використовуються для складання прогнозів режиму підземних вод на території природно-технічних систем в умовах господарської діяльності. Моделі розробляються та адаптуються до місцевих умов залежно від характеристик та потреб прогнозу [1, 2, 6].

Класифікація прогнозів. Прогноз є висловлюванням, яке фіксує в будь-яких термінах події, які поки що не спостерігаються. Прогноз дає характеристику поведінки певної системи в майбутньому, часто включає її оцінку в теперішньому (діагноз) і в минулому (епігноз). Прогноз має ймовірнісний характер і тому може не виправдатися. Процес складання прогнозу називається *прогнозуванням*.

У момент складання прогнозу неможливо точно визначити його істинність. Прогноз стосується конкретного інтервалу часу та простору і складається на основі інформації про стан об'єкта в минулому, теперішньому та майбутньому часі. Можна виділити такі етапи прогнозування: 1) формулювання задачі, 2) дослідження природного об'єкта та його території, 3) вибір методів моделювання, 4) проведення прогнозних розрахунків, 5) їх верифікація або визначення ступеня істинності шляхом інверсного моделювання, 6) синтез та стикування різних моделей.

Гідрогеологічні прогнози описують розвиток природно-технічних систем, які мають безліч взаємоспрямованих зв'язків і де одночасно відбувається декілька фізичних процесів (фільтрація, міграція, деформації гірських порід). Тому часто складно прогнозувати окремі елементи чи процеси, не розглядаючи всю систему в цілому. Прогнози складають з метою обґрунтування проектів гідротехнічного будівництва, при застосуванні природоохоронних заходів у зв'язку із захистом територій від підтоплення, при оцінюванні запасів підземних вод тощо.

Відповідно до характеристик описуваної природно-технічної системи виділяються такі основні *ознаки прогнозів* [6, 12]:

1. *Розмір системи* може бути мікролокальний, від 1 до 10 м³ (зона кольматації або суфозії навколо свердловин чи витікань з

окремих ємностей); сублокальний, від 10 до 100 м³ (зона впливу окремої невеликої дрени, шурфу або колодязя); локальний (ділянка водоносного горизонту, зона впливу водовідстійника або хвостосховища); регіональний, відповідний площі окремих басейнів і територій (Кривбас, Західний Донбас, Крим тощо), та глобальний, якому відповідають оцінки вимірювань показників стану навколишнього середовища, змінюваних антропогенними факторами.

2. Залежно від *часу дії* прогноз може бути короткостроковим (до 10 років), середньостроковим (25 – 50 років), та довгостроковим (понад 50 років). Іноді прогнози виконуються незалежно від часу для подій, які рідко трапляються (землетруси, паводки з малою повторюваністю).

3. Можливі такі *способи вираження прогнозу*: якісний (описовий), що містить переважно нечіткі поняття, кількісний і змішаний. Кількісні оцінки більш достовірні для локальних об'єктів і короткострокових періодів часу.

4. *Комплексність* означає виконання прогнозу для об'єкта в цілому або його окремих складових (водоносний горизонт чи басейн, споруда, підземна виробка чи масив порід).

5. *Джерела інформації*, на які спирається прогноз, можуть бути емпіричними (дослідний матеріал, польові виміри), теоретичними (уявлення про модельований процес, наприклад фільтрацію підземних вод), а також узагальненими на основі спеціальної літератури.

6. *Точність* пов'язується з одиницями виміру та допусками. Так, похибка розрахунку рівня підземних вод визначається у метрах, а її максимальне значення може складати 0,1 або 1 м залежно від масштабу моделі та точності даних. Ймовірність певних сценаріїв прогнозу визначається у відсотках, з якими може реалізуватися певний сценарій: 0% означає неможливу подію, 100% – таку подію, яка відбудеться за будь-яких умов. Такі показники дозволяють кількісно оцінювати точність та вірогідність прогнозу.

7. Прогноз за *характером* може бути детермінований, коли вважається, що розвиток процесу можна однозначно передбачити, або ймовірнісний, коли допускаються різні сценарії з певною ймовірністю. Реальний прогноз має бути багатоваріантним, тобто враховувати кілька можливих сценаріїв розвитку.

8. *Поведінка подій у часі* означає швидкість прогнозованих змін: процеси змінюються безперервно (підйом рівня ґрунтових вод, карстоутворення) і дискретно, під дією періодичних сил (заповнення хвостосховища або ставка, стрибкоподібні зміни дебіту свердловин). Окремо можуть прогнозуватися кінцеві стани системи або результат процесу, наприклад, максимальний розмір зони підтоплення та найвищий рівень підземних вод.

Методи прогнозування. Існує кілька груп цих методів, серед яких можна виділити: 1) візуальні й логічні, 2) загальнонаукові кількісного прогнозу; 3) змішаних прогнозів.

До першої групи належать такі: картування територій, аналіз факторів і умов, індукція, аналогія та експертні оцінки.

Картування передбачає виконання низки проміжних дій, у тому числі інтерполяції за точками спостереження або свердловинами, виділення меж, зон та районів. Картування – це основа для виконання прогнозів іншими методами з використанням графічних моделей. Побудована карта є просторовим прогнозом будь-яких властивостей у досліджуваній області. За допомогою картування можуть бути оконтурені, наприклад, зони підтоплення та зсувонебезпечні.

Аналогія є виділенням подібних рис на двох різних об'єктах з подальшим перенесенням властивостей одного з них на інший. Вона може проводитися в лабораторних умовах, на фізичній моделі або на реальних об'єктах. Аналогія використовується при виділенні геологічних полів, зсувонебезпечних територій, нафто- і вугленосних районів тощо. Розглянемо принцип аналогії з формальної точки зору.

Нехай для двох порівнюваних гідрогеологічних процесів або об'єктів А та В виявлено N подібностей властивостей або відношень P : $P_{A,1} = P_{B,1}, \dots, P_{A,N} = P_{B,N}$. Тоді за аналогією можна зробити висновок щодо ще однієї, $(N+1)$ -ї ознаки: $P_{A,N+1} = P_{B,N+1}$. Так, для двох зразків ґрунту легко визначаються такі властивості, як щільність, пористість, гранулометричний склад. За аналогією допустимо зробити висновок про те, що й інші властивості, які складніше визначити (наприклад, відносне просідання чи активна пористість), так само близькі. Їхні характеристики можуть також оцінюватися за літературними даними у разі, якщо експериментальне визначення неможливо.

Експертні оцінки спираються на досвід, ерудицію, інтуїцію експерта, ґрунтуються на його практиці. Найбільш цінними вони

стають за відсутності початкової інформації або в умовах її неповноти. На практиці використовуються як індивідуальні, так і колективні оцінки. Один із способів колективних оцінок (метод Дельфі) заснований на багатократному опитуванні декількох експертів з поступовим формуванням єдиного підходу та оцінки.

До загальнонаукових методів кількісного прогнозу належать екстраполяція, інтерполяція, апроксимація.

Екстраполяція є процедурою встановлення значень функції $f(x)$ у точках, що знаходяться поза діапазоном спостережень (x_0, x_1, \dots, x_N) (рис. 20, а). Вона достовірна в обмеженому проміжку поза діапазоном, довжина якого залежить від фактичної довжини ряду спостережень $(x_N - x_0)$. Прикладом екстраполяції є метод тренд-аналізу.

Інтерполяція – це процедура встановлення значень функції $f(x)$ у точках інтервалу, який охоплює ряд спостережень (рис. 20, а). Тип та точність інтерполяції залежить від кількості точок, у яких задані значення функції. Може бути одно- та багатовимірною інтерполяція, виконувана поліномами різного ступеня.

Апроксимація полягає в підборі деякої залежності, яка згладжує коливання даних в окремих пунктах або моментах часу (рис. 20, б). Апроксимуюча крива, показана на рисунку як $y=f_0(x)$, повинна мінімально відхилятися від експериментальних значень, тобто бути «кращим» наближенням до них порівняно з іншими кривими $y=f_1(x)$ та $y=f_2(x)$. Для апроксимації часто використовується метод найменших квадратів.

Методи змішаних прогнозів ґрунтуються на методах моделювання. Фізичні моделі використовують такий принцип: якщо критерії подібності моделі й об'єкта близькі між собою, то результати з моделі або експериментальної установки можна перенести на реальний, менш вивчений об'єкт.

При прогнозуванні природно-технічних систем використовуються детерміновані та стохастичні моделі. Детермінована модель дає аналітичне уявлення або опис об'єкта, за яким для даної сукупності вхідних даних буде однозначно отримано єдиний результат. У стохастичних моделях один чи більше параметрів є випадковими величинами або процесами, тому для тієї ж сукупності вхідних даних може бути отримано кілька результатів.

За допомогою детермінованих математичних моделей процеси на реальному об'єкті описуються системою диференціальних рівнянь і їхніх розв'язків. Застосування цього типу моделей обґрунтовано, якщо:

1) принципи розрахунку відповідають механізму процесу (наприклад, чисельна модель фільтрації заснована на балансі води в блоках сітки);

2) існує аналогія між розрахунковою схемою і природною системою, тобто визначені межі розрахункової області та її структура, що відповідають природному об'єкту;

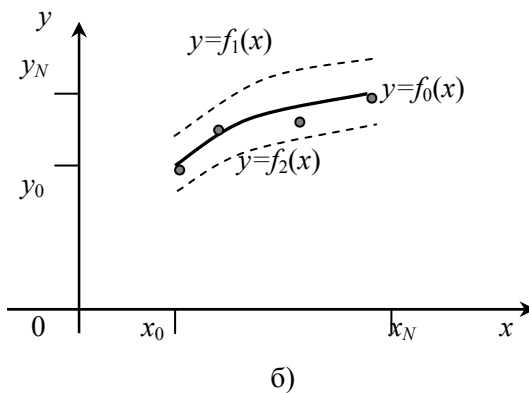
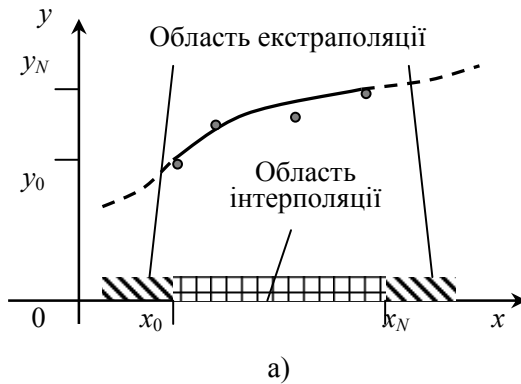


Рис. 20. Схеми інтерполяції й екстраполяції (а) та апроксимації (б)

3) параметри, задані для розрахунку, отримані в тих самих умовах, у яких функціонує система, тобто параметри моделі задаються як результати натурних спостережень в аналогічному масштабі.

Отже, результати лабораторних досліджень не можна безпосередньо переносити на реальний об'єкт, де відбуваються фізичні процеси на площі кілька тисяч квадратних метрів і більше, зважаючи на так званий «масштабний» ефект.

Статистичні та стохастичні моделі ґрунтуються на припущенні, що властивості та певні параметри процесу неможливо точно визначити, і тому вони вважаються випадковими величинами. Геологічне поле, в якому задана проникність і пористість, розглядається у цьому сенсі випадковим полем. Тоді й результат прогнозу буде випадковою величиною, для якої можна встановити математичне сподівання, дисперсію оцінок, довірчі інтервали.

Такий підхід реалізується наведеним далі способом. Будується кілька сот випадкових полів фізичних параметрів (проникності, пористості). Для кожного поля виконується розрахунок фільтрації, після чого визначаються статистичні оцінки прогнозованого рівня підземних вод, складових балансу та інших параметрів. Використання випадкових величин дозволяє моделювати раптові, погано передбачувані чинники, випадкові зміни в ході процесу.

Результатом моделювання як детермінованого, так і стохастичного є карти ізоліній величин, що визначаються (карти ознак). Крім того, можуть прогнозуватися узагальнені інтегральні показники, наприклад сумарне перетікання води з одного пласта до іншого через водотривкий шар. Статистичні та стохастичні моделі повніше, адекватніше відображають об'єкт, але їх складніше забезпечити необхідною інформацією.

Питання для самоконтролю

1. Які прогнози можна виконувати за допомогою гідрогеологічних моделей? Наведіть приклади.
2. Охарактеризуйте основні етапи прогнозування на прикладі процесу підтоплення.
3. Дайте класифікацію таких прогнозів:

а) підйому рівня води на площі великого міста протягом 5 років на основі статистичних даних;

б) зниження рівня підземних вод поблизу водозабору тривалістю понад 15 років;

в) затоплення шахти та підйому рівня підземних вод.

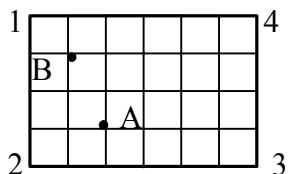
4. Наведіть приклад використання аналогії при прогнозуванні в гідрогеології.

5. Охарактеризуйте візуальні та логічні методи прогнозів.

6. У чому відмінності між стохастичними та детермінованими методами моделювання?

Задачі

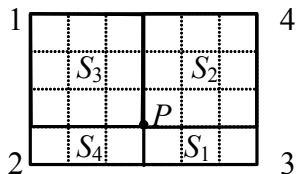
Двовимірна білінійна інтерполяція.
1. Шляхом інтерполяції виконати прогнозну оцінку коефіцієнта фільтрації в зазначених точках А та В. $K_1 = 12$ м/добу, $K_2 = 10$ м/добу, $K_3 = 5$ м/добу, $K_4 = 4$ м/добу.



Розв'язування. Згідно з формулою білінійної інтерполяції значення параметра в будь-якій точці P прямокутника визначається як

$$K_P = \frac{S_1}{S} K_1 + \frac{S_2}{S} K_2 + \frac{S_3}{S} K_3 + \frac{S_4}{S} K_4, \quad (47)$$

де S_1, S_2, S_3, S_4 – площі прямокутників, протилежних відповідним вершинам, S – площа всього прямокутника; K_1, K_2, K_3, K_4 – коефіцієнти фільтрації у відповідних точках.



Отже, для точки A $S_1 = 4$, $S_2 = 12$, $S_3 = 6$, $S_4 = 2$, $S = 24$. За формулою (47) $K_A = 8,58$ м/добу. Аналогічно для точки B $S_1 = 15$, $S_2 = 5$, $S_3 = 1$, $S_4 = 3$, тоді $K_B = 10,29$ м/добу. Точка B порівняно з точкою A знаходиться ближче до точки «1» з найбільшим на прямокутнику значенням K , тому $K_B > K_A$.

Список літератури

1. Антонов, В.В. Математические методы в гидрогеологии и инженерной геологии [Текст] / В.В. Антонов. – Л.: Изд-во ЛГИ, 1987. – 87 с.
2. Бэр, Я. Физико-математические основы фильтрации воды. [Текст] / Я. Бэр, Д. Заславски, С. Ирмей. – М.: Мир, 1971. – 451 с.
3. Введение в моделирование гидрогеологических процессов [Текст] / А.Е. Бабинец, Н.С. Огняник, А.Б. Ситников и др. – К.: Наук. думка, 1980. – 252 с.
4. Водообмен в гидрогеологических структурах Украины. Методы изучения водообмена [Текст] / В.М. Шестоपालов, А.Б. Ситников, В.И. Лялько и др.; отв. ред. В.М. Шестоपालов. – К.: Наук. думка, 1988. – 272 с.
5. Гавич, И.К. Теория и практика применения моделирования в гидрогеологии [Текст] / И.К. Гавич. – М.: Недра, 1980. – 358 с.
6. Гавич, И.К. Методы обработки гидрогеологической информации с вариантами задач [Текст] / И.К. Гавич, С.М. Симонова, В.М. Швец. – М.: Высшая школа, 1981. – 160 с.
7. Гороховский, В.М. Математические методы и достоверность гидрогеологических и инженерно-геологических прогнозов [Текст] / В.М. Гороховский. – Л.: Недра, 1977. – 77 с.
8. Карплюс, У. Моделирующие устройства для решения задач теории поля [Текст] / У. Карплюс. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 487 с.
9. Ломакин, Е.А. Численное моделирование геофильтрации [Текст] / Е.А. Ломакин, В.А. Мироненко, В.М. Шестаков. – М.: Недра, 1988. – 228 с.
10. Лукнер, Л. Моделирование геофильтрации [Текст] / Л. Лукнер, В.М. Шестаков. – М.: Недра, 1976. – 407 с.
11. Рац, М.В. Структурные модели в инженерной геологии [Текст] / М.В. Рац. – М.: Недра, 1973. – 215 с.
12. Розовский, Л.Б. Инженерно-геологические прогнозы и моделирование [Текст] / Л.Б. Розовский, И.П. Зелинский, В.М. Воскобойников. – К.-Одесса: Вища школа. Голов. пред., 1987. – 208 с.
13. Силин-Бекчурин, А.И. Динамика подземных вод. С основами гидравлики [Текст] / А.И. Силин-Бекчурин. – М.: МГУ, 1965. – 380 с.
14. Справочное руководство гидрогеолога [Текст]: в 2 т. / под ред. В.М. Максимова. – М.: Недра, 1979. – Т. 1. – 512 с.

ЛАБОРАТОРНІ РОБОТИ

Лабораторна робота № 1

Чисельне моделювання течії підземних вод до прибережного водозабору в програмі **ModFlow**

Опис процесу. Напірний водоносний горизонт має контакт з річкою, рівень води в якій на ділянці водозабору становить H_r (рис. 21). У водоносному горизонті розміщено N відкачувальних свердловин, координати яких (x_i, y_i) , а дебїти Q_i . Внаслідок відкачування рівень підземних вод (РПВ) знижений порівняно з непорушеним режимом. Відбір води свердловинами забезпечується за рахунок припливу підземних, річкових та інфільтраційних вод, які мають різну мінералізацію.

Мета роботи – оцінити роль факторів, що впливають на співвідношення складових водного балансу, зміну РПВ і на середню мінералізацію відкачуваної води.

Математична модель. Зміна рівня підземних вод у водоносному горизонті описується рівнянням неусталеної фільтрації (38).

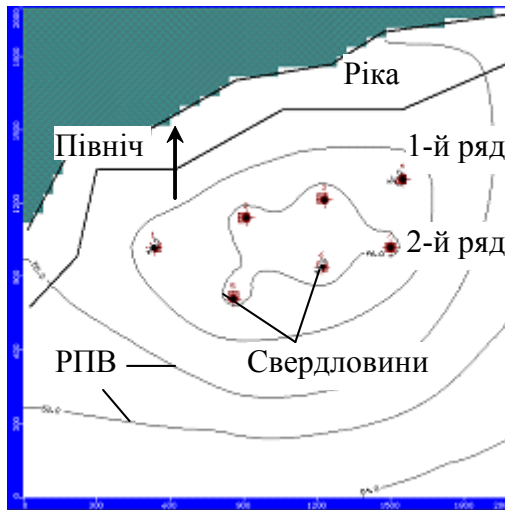


Рис. 21. Схема фільтрації в районі водозабору

Як початкова умова задається РПВ перед відкачуванням. На межі з річкою ставиться умова контакту підземних та поверхневих вод

$$\xi \frac{\partial H}{\partial s} = H - H_r, \quad (48)$$

де параметр ξ враховує провідність відкладів під руслом ріки; s – вектор нормалі до межі області фільтрації. На інших ділянках межі (рис. 21) задано змінний рівень підземних вод H_L .

На більшій частині водоносного горизонту проникність дорівнює K , разом з тим на його південній частині наявна ділянка зі зниженою проникністю $K_n < K$.

Рівень підземних вод розраховується у програмі **ModFlow** на основі скінченнорізницевого розв'язування рівняння фільтрації (38) за неявною схемою.

Середня мінералізація відкачуваних вод наближено визначається за формулою

$$C_s = \frac{C_{gw}Q_{gw} + C_rQ_r + C_{in}Q_{in}}{Q_{gw} + Q_r + Q_{in}}, \quad (49)$$

де C_{gw} , C_r , C_{in} – мінералізація підземних, річкових та інфільтраційних вод відповідно; Q_{gw} , Q_r , Q_{in} – їхні припливи до свердловин, що розраховуються як складові балансу води в межах області розрахунку.

У ході виконання лабораторної роботи необхідно для кожного варіанта розрахункових параметрів (таблиця)

- 1) побудувати карти рівня підземних вод,
- 2) визначити складові балансу підземних вод,
- 3) обчислити середню мінералізацію відкачуваних вод за формулою (49),

- 4) визначити мінімальний РПВ H_{min} поблизу свердловин.

Параметри у пп. 2 і 4 слід розрахувати залежно від:

- а) значень коефіцієнта фільтрації слабопроникного включення $K_{n,1}$ та $K_{n,2}$;

- б) значень інфільтрації w_1 і w_2 ;

- в) роботи тільки першого, тільки другого чи обох рядів свердловин.

При зміні одного з параметрів значення інших фіксуються. Загалом необхідно розрахувати 12 варіантів фільтраційних параметрів (таблиця). Для параметрів, що необхідно змінювати в

ході моделювання і які потрібні для розрахунків, рекомендуються такі значення: $K = 5+j/2$ м/добу, $K_{n,1} = 0,1K$, $K_{n,2} = 0,3K$, $Q_i = 800+20 \cdot j$ м³/добу, $i = 1, \dots, 7$; $w_1 = 50$ мм/рік, $w_2 = 150$ мм/рік; $C_{gw} = 0,8$ г/л, $C_r = 1,5$ г/л, $C_{in} = 0,1$ г/л; j – номер за списком у журналі групи.

Інші параметри, що не потребують зміни, задані безпосередньо у програмі. Для них рекомендуються такі значення: розмір області 2000×2000 м, розмір блоків сітки 40×40 м, пористість 0,3, пружноємність 0,0001, відстань свердловин від річки 150 – 200 м для першого ряду, 300 – 400 м для другого.

Приклад оформлення результатів моделювання

№	K_n , м/добу	w , мм/рік	Кількість здіяєних свердловин	Q_{gw} , м ³ /добу	Q_r , м ³ /добу	Q_{in} , м ³ /добу	C_s , г/л	H_{min} , м
1	$K_{n,1}$	w_1	3 (2-й ряд)					
2	$K_{n,2}$	w_1	3 (2-й ряд)					
3	$K_{n,1}$	w_2	3 (2-й ряд)					
4	$K_{n,2}$	w_2	3 (2-й ряд)					
5	$K_{n,1}$	w_1	4 (1-й ряд)					
6	$K_{n,2}$	w_1	4 (1-й ряд)					
7	$K_{n,1}$	w_2	4 (1-й ряд)					
8	$K_{n,2}$	w_2	4 (1-й ряд)					
9	$K_{n,1}$	w_1	7 (всі)					
10	$K_{n,2}$	w_1	7 (всі)					
11	$K_{n,1}$	w_2	7 (всі)					
12	$K_{n,2}$	w_2	7 (всі)					

Оформлення результатів. Звіт про виконану роботу має включати такі складові:

1. Постановку задачі з індивідуальними значеннями вхідних даних.

2. Карти РПВ, побудовані за допомогою програми **ModFlow** або інших (наприклад **Surfer**), суміщені з відповідними картами поля швидкості фільтрації та положеннями свердловин.

3. Результати розрахунків складових припливу Q_{gw} , Q_r , Q_{in} , середньої мінералізації C_s та найнижчого РПВ при різних значеннях параметрів (таблиця).

4. Висновки щодо впливу параметрів K_n та w , а також положення свердловин відносно берега, на середню мінералізацію та РПВ.

Вказівки до роботи в програмі ModFlow

Програма **ModFlow**, розроблена фірмою Waterloo Hydrogeologic Software (Канада), призначена для моделювання течій підземних вод та міграції в них розчинних речовин. Зараз вона використовується у десятках країн світу і фактично є однією з провідних програм для гідрогеологічного моделювання. У рамках даного посібника недоцільно висвітлювати всі можливості **ModFlow**. Тому далі описано лише дії, необхідні для виконання лабораторної роботи №1. Зокрема, стисло подано створення моделі, введення та редагування даних, проведення розрахунків, перегляд результатів та їх запис до зовнішнього файлу. Для зручності наведено стислий переклад гідрогеологічних термінів, вживаних у програмі **ModFlow** (додаток 2).

Моделі створюється у пункті «New» меню «File». У вікні, що з'являється після вибору імені моделі та її каталогу (папки) на диску, необхідно задати діапазони уздовж координат x , y та z , число рядків («Rows») та стовпчиків («Columns»), одиниці виміру довжини («Length»), часу («Time»), коефіцієнта фільтрації («Conductivity»), дебіту свердловин («Pumping Rate»), інфільтрації («Recharge»), маси («Mass») та концентрації («Concentration»).

Уведення та редагування даних здійснюється у пункті меню «Input». Після цього на екрані з'являється нове меню, в якому можна вибирати пункти у верхньому рядку або через список зліва, що розкривається (рис. 22). Збереження внесених змін виконується після редагування в кожному пункті; після виходу з нього необхідно підтвердити або відмінити зроблені зміни («Save ... before exiting?»). Неактивні блоки (де не виконується розрахунок) визначаються у меню «Grid» у пункті «Inactive Cells» і зображуються сіро-зеленим кольором.

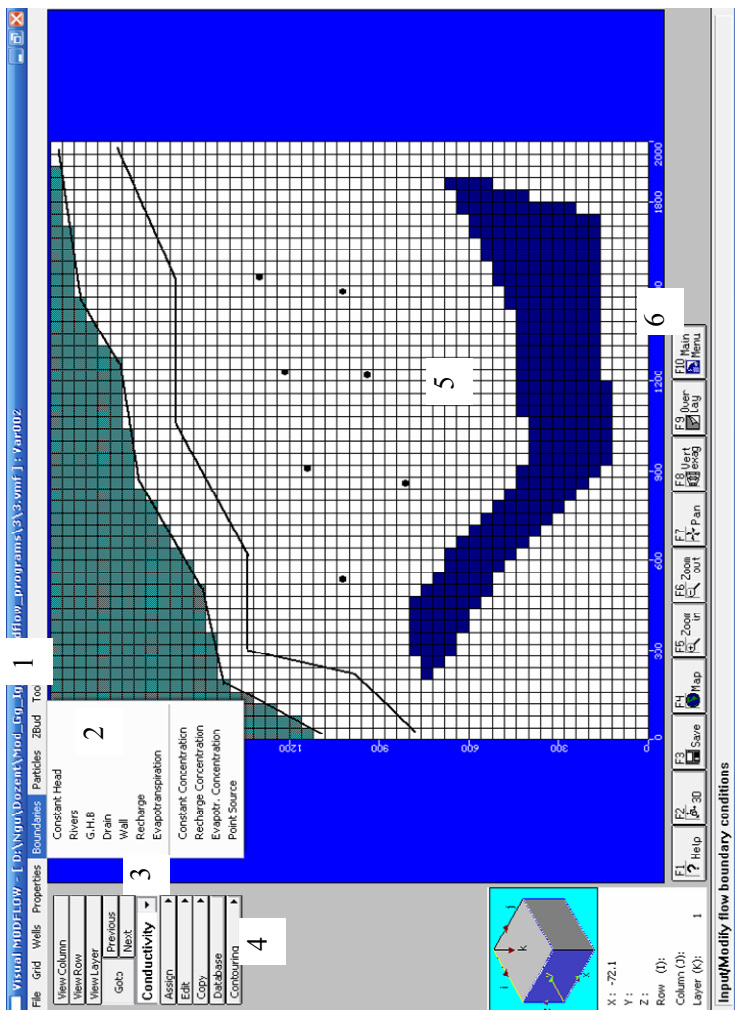


Рис. 22. Вікно редагування даних у програмі **ModFlow**: 1 – головне меню, 2 – підменю, 3 – список, що розкривається, 4 – стовпчик пунктів локального меню, 5 – область редагування параметрів на сітці, 6 – «гарячі» клавіші

Параметри свердловин задаються у пункті «*Pumping Wells*» меню «*Wells*». У лівому стовпчику з'являється нове меню, у пунктах якого можна змінювати параметри свердловин: додавати («*Add Well*»), видаляти («*Delete Well*»), активізувати або робити неактивними («*Wells On/Off*»), редагувати («*Edit Well*»). Обраний пункт меню підсвічується після натиснення курсором за допомогою миші. Активні свердловини позначаються бурим кольором, неактивні – сіро-зеленим.

У вікні редагування «*Edit Well*» задаються такі параметри свердловини: її ім'я («*Well Name*»), координати, діапазони вертикального положення фільтра у водоносному горизонті («*Screen Bottom*», «*Screen Top*»), графік відкачки («*Pumping Schedule*»), згідно з яким визначається початок («*Start*»), закінчення («*End*») у днях певного періоду та дебіт свердловини («*Rate*»). Від'ємний дебіт задається для відкачувальних свердловин, дебіт зі знаком «+» – для нагнітальних.

Параметри інфільтраційного живлення змінюються у пункті «*Recharge*» меню «*Boundaries*». У нових пунктах меню, що з'являється зліва, можна редагувати «*Edit*» або присвоювати нові значення в окремому блоці сітки «*Assign*» чи зоні, заданій як лінія «*Line*», багатокутник «*Polygon*» або прямокутник «*Window*». При редагуванні зон з різною інфільтрацією («*Edit*»→«*Properties*») у вікні, що з'явиться, задаються діапазон часу та значення інфільтраційного живлення, які відповідають блокам сітки виділеного кольору.

Коефіцієнт фільтрації задається у пункті «*Conductivity*» меню «*Properties*». У нових пунктах меню, що з'являється ліворуч, можна редагувати («*Edit*») або присвоювати нові значення («*Assign*») аналогічно параметру інфільтраційного живлення. Крім того, можна редагувати в цілому список усіх зон з різним коефіцієнтом фільтрації «*Database*», задаючи компоненти проникності вздовж осей координат K_x , K_y , K_z . Кожна зона з різною проникністю помічається своїм кольором. У разі моделювання геофільтрації в окремому водоносному горизонті (у лабораторній роботі №1) рекомендується задавати однакові значення K_x , K_y , K_z в одному й тому ж блоці. Значення K_z , відмінні від K_x та K_y , слід задавати у разі моделювання багат шарових систем з двома та більше водоносними горизонтами.

Проведення розрахунків виконується після входу до меню «*Run*». Одразу ж слід вибрати режим процесу: неусталений («*Transient*

Flow») або стаціонарний («*Steady State Flow*»). Параметри часового кроку задаються у пункті «*Time Steps*» меню «*MODFLOW*», а детальність проміжної інформації (розраховані параметри у проміжні моменти часу) визначається у пункті «*Output Control*» того самого меню.

Безпосередньо розрахунки виконуються у пункті меню «*Run*». У вікні, що з'явиться, слід визначити виконуваний модуль програми: як мінімум, слід задати розрахунок фільтрації у модулі «*MODFLOW*» та розрахунок водного балансу в модулі «*Zone Budget*». У процесі розрахунку відкриється кілька вікон. В одному з них буде показаний загальний водний баланс в області фільтрації, а у вікні «*Win32 MODFLOW Suite*» – відображені виконані модулі. Вихід з меню здійснюється натисненням кнопки «*Exit*» у цьому меню.

Перегляд результатів розрахунків виконується після входу до меню «*Output*». На екрані зображується розподіл напору чи рівня води («*Equipotentials*») в області фільтрації (рис. 23). Вибравши пункт «*Velocity*», можна показати картину потоку, після чого до наявного рисунку додаються стрілки, що відображають швидкість фільтрації. Зовнішній вигляд ліній та стрілок, вибір кольорової карти чи простих ліній задається у пункті меню «*Options*» у лівому стовпчику.

Створений рисунок записується у зовнішній файл у пункті «*Export*» меню «*File*»:

- а) у форматі «*dxf*», що читається програмою **AutoCad**,
- б) як числові дані у текстовому файлі з розширенням «*dat*», що може бути опрацьований далі в програмі **Surfer**,
- в) як графічний об'єкт та готовий рисунок у форматі «*emf*»,
- г) у форматі «*shp*».

При цьому можна обрати як світові координати, так і координати, прийняті у моделі.

Водний баланс переглядається у пункті «*Flow Budget Graphs*» меню «*Budget*». Серед вікон, що з'являються, слід вибрати «*Time Step*», де у вигляді гістограми зображуються складові балансу води. Синій колір відповідає надходженню води до області фільтрації («*In*»), червоний – її витіканню з області («*Out*»).

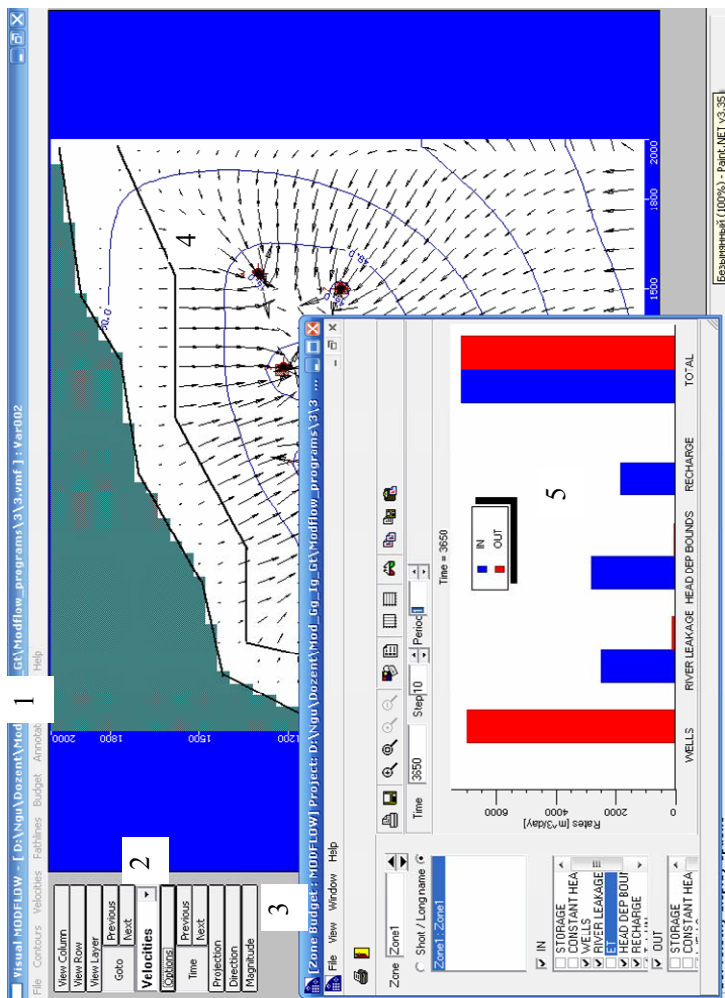


Рис. 23. Вікно перегляду результатів моделювання у програмі **ModFlow**:
 1 – головне меню, 2 – список, що розкривається, 3 – стовпчик пунктів локального меню, 4 – область зображення карти напору підземних вод та напрямків їх течії, 5 – вікно перегляду розрахунку водного балансу

Натиснення курсором за допомогою миші на стовпчик показує числове значення відповідної складової водного балансу. Повторне натиснення на напису видаляє його з екрана. Два правих стовпчики «*Total*» показують сумарний баланс води в області або в обраній зоні області фільтрації.

Приплив річкових вод до області фільтрації (параметр Q_r в лабораторній роботі №1) розраховується як різниця між значеннями на синьому та червоному стовпчиках («*River Leakage*»), тобто між їх надходженням та втратою. Приплив підземних вод Q_{gw} до області фільтрації також розраховується як різниця між значеннями на синьому та червоному стовпчиках «*Head Dep Bounds*». Приплив інфільтраційних вод Q_{in} визначається як числове значення на синьому стовпчику «*Recharge*». Сума цих трьох складових водного балансу має дорівнювати сумарному дебіту активних свердловин (червоний стовпчик «*Recharge*»).

Визначити рівень підземних вод у будь-якій точці області фільтрації можна у пункті «*Cell Inspector*» меню «*Tools*». У вікні, що з'явиться, треба вибрати вкладку «*Cell Values*» для значень у блоках сітки; далі у списку знайти позицію «*Head*». Переміщуючи курсор за допомогою миші, можна побачити відповідну зміну значення напору (рівня) у цій позиції.

Лабораторна робота №2

Експериментальне визначення фільтраційних параметрів піщаного ґрунту шляхом зворотного моделювання

Опис процесу та експериментальної установки. Моделюється одновимірна неусталена течія води через первісно сухий ґрунт у трубці, розташованій під певним кутом α до горизонту (рис. 24), причому α може приймати як позитивні, так і від'ємні значення. Прозора скляна трубка 4 щільно заповнюється сухим піском. Посудина 1, заповнена водою, з'єднана шлангом 2 з трубкою 4. В посудині підтримується напір h , що дорівнює висоті водного стовпа над лівим кінцем трубки. Затискач 3 на з'єднувальному шлангу регулює надходження води до трубки. Перед початком досліду затискач замкнений.

Уздовж скляної трубки закріплена лінійка для визначення положення фронту промочування. На протилежному до входу шланга кінці трубки закріплюється посудина 5 для збирання води, що витікає з трубки.

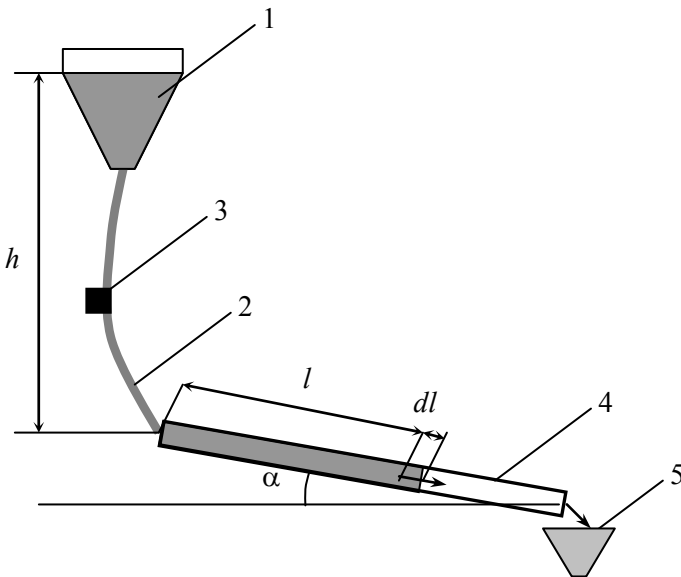


Рис. 24. Схема експериментальної установки

Рух фронту промочування може бути описаний за допомогою математичної моделі, що дозволяє визначити відхилення між експериментальним та розрахованим положенням фронту. Це відхилення залежить від фільтраційних параметрів (коефіцієнта фільтрації та капілярного напору), використаних у моделі. Мінімальне відхилення відповідає найбільш точним оцінкам цих параметрів.

Мета роботи – визначення параметрів фільтрації піщаного ґрунту (коефіцієнта фільтрації та капілярного напору) шляхом зворотного моделювання, тобто пошуком «найкращих» оцінок цих параметрів, за яких мінімізується відхилення між розрахованими та експериментальними даними.

Математична модель процесу базується на рівнянні балансу маси води в елементарному об'ємі пористого середовища довжиною dl за проміжок часу dt (рис. 24).

За законом Дарсі

$$v = K \frac{\Delta h}{l} = n \frac{dl}{dt}, \quad (50)$$

де v – швидкість фільтрації, м/с; K – коефіцієнт фільтрації насиченого піску, м/с; Δh – сумарний перепад напорів, м, $\Delta h = h + h_k + l \sin(\alpha)$; h – різниця геометричного положення кінців трубки, м, h_k – капілярний напір (потенціал), м; α – кут напрямку фільтрації, рад; l – довжина шляху фільтрації, м; n – пористість.

З фізичної точки зору рівняння (50) означає, що та кількість води, яка надходить до елементарного об'єму ґрунту, витрачається на заповнення порожнин у ньому, об'єм яких визначається пористістю n .

Рівняння (50) можна переписати у вигляді:

$$K \left(\frac{h_s}{l} + \sin \alpha \right) = n \frac{dl}{dt}, \quad (51)$$

де $h_s = h + h_k$.

Розв'язуючи рівняння (51), одержимо залежність $t(l)$ у явному вигляді або $l(t)$ у неявному

$$t(l) = \frac{n}{K} \cdot \frac{l \sin \alpha - h_s \ln(1 + l \sin(\alpha) / h_s)}{\sin^2 \alpha}. \quad (52)$$

У разі чисто вертикальної течії ($\alpha=90^\circ$) формула (52) переходить у співвідношення:

$$t(l) = \frac{K}{n} \left(l - h_s \ln \left(1 + \frac{l}{h_s} \right) \right). \quad (53)$$

У випадку горизонтальної течії ($\alpha=0^\circ$) розв'язок рівняння (51) запишеться так:

$$l(t) = \sqrt{\frac{2K t h_s}{n}}, \quad (54)$$

звідки можна в явному вигляді розраховувати капілярний напір

$$h_k = h - \frac{l^2 n}{2K t}. \quad (55)$$

Після визначення фактичного положення фронту промочування $l_{exp,i}$ у фіксовані моменти часу t_i для кута $\alpha=0^\circ$ можна обчислити середньоквадратичне відхилення між розрахованими та експериментальними даними за формулою

$$\Delta l_s = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (l_{exp,i} - l_{mod,i})^2}, \quad (56)$$

де $l_{exp,i}$, $l_{mod,i}$ – положення фронту промочування відповідно до експериментальних даних та моделювання у моменти часу t_i . Для формули (52) у випадку $\alpha \neq 0^\circ$ слід визначити відхилення у часі

$$\Delta t_s = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (t_i - t_{mod,i})^2}, \quad (57)$$

де моменти часу $t_{exp,i}$ розраховуються за формулою (52) для відповідних відстаней $l_{exp,i}$. Шукані значення капілярного напору h_k та коефіцієнта фільтрації K відповідають мінімальним значенням Δl_s чи Δt_s , які визначаються шляхом розрахунків.

Порядок проведення дослідів

1. Зафіксувати скляну трубку із сухим піском під певним кутом до горизонту α_1 .

2. При замкненому затискачі заповнити водою посудину 1 та визначити напір h .

3. Відкрити затискач 3 та, слідкуючи за зміною кольору піску при його зволоженні, фіксувати положення фронту промочування через кожні 15 – 60 с. Слід узяти до уваги, що внаслідок збільшення шляху фільтрації та відповідного зменшення градієнта рух фронту промочування уповільнюється.

4. Повторити дослід при іншому куті нахилу трубки α_2 . Рекомендується провести дослід для іншого піску.

Обробка результатів експерименту та оформлення звіту

1. Скласти таблицю положення фронту промочування $l_{exp,i}$ у моменти часу t_i для двох різних значень α .

2. Обчислити положення фронту промочування $l_{mod,i}$ за формулою (54) у випадку $\alpha=0^\circ$ або моменти часу, які відповідають положенню $l_{exp,i}$ за формулою (52). Використовувати для коефіцієнта фільтрації K як орієнтовне значення, розраховане за формулою

$$K = \frac{QL}{F\Delta h_s}, \quad (58)$$

де Q – витрата течії в трубці, заміряна впродовж кількох хвилин після повного насичення піску, m^3/s ; L – довжина трубки, м; F – площа поперечного перетину течії в трубці, m^2 .

3. Визначити відхилення між розрахованими та експериментальними значеннями фронту промочування або моментами часу за формулами (52) або (54).

4. Змінюючи параметри K та h_s , знайти такі значення K_{opt} та $h_{s,opt}$, щоб відхилення між розрахованими та експериментальними значеннями Δl_s чи Δt_s було б мінімальним.

5. Визначити діапазони значень параметрів K та h_s і скласти таблицю значень функції відхилення Δl_s чи Δt_s , що розраховується при різних значеннях K та h_s (таблиця). Рекомендується взяти такий діапазон: $K_{min} = 0,8 K_{opt}$; $K_{max} = 1,2 K_{opt}$; $h_{s,min} = 0,8 h_{s,opt}$; $h_{s,max} = 1,2 h_{s,opt}$.

Приклад оформлення результатів моделювання

	K_{min}	K_{opt}	K_{max}
$h_{s,min}$			
$h_{s,opt}$			
$h_{s,max}$			

6. Побудувати відповідні графіки $l(t)$ та $t(l)$.

7. Проаналізувати графіки, вказавши на проміжки часу, де відхилення теоретичних результатів від експериментальних найбільші та найменші.

Джерела похибок:

- 1) неоднорідність піску, що заповнює трубку,
- 2) зменшення напору під час промочування ґрунту,
- 3) існування невеликої перехідної зони між сухою та насиченою частинами трубки,
- 4) нерівномірність початкового зволоження піску,
- 5) наявність защемленого повітря у насиченому піску,
- 6) не зовсім щільне укладення піску в трубці.

ДОДАТКИ

Додаток 1

Значення функції $K_0(x)$

x	$K_0(x)$	x	$K_0(x)$	x	$K_0(x)$	X	$K_0(x)$
0.01	4.721245	1.15	0.341117	2.45	0.06616	3.75	0.014774
0.02	4.028457	1.2	0.318508	2.5	0.062348	3.8	0.013966
0.03	3.62353	1.25	0.297603	2.55	0.058765	3.85	0.013203
0.04	3.336541	1.3	0.278248	2.6	0.055398	3.9	0.012482
0.05	3.114234	1.35	0.260305	2.65	0.052233	3.95	0.011802
0.1	2.427069	1.4	0.243655	2.7	0.049255	4	0.01116
0.15	2.030028	1.45	0.228188	2.75	0.046455	4.05	0.010553
0.2	1.752704	1.5	0.213806	2.8	0.04382	4.1	0.00998
0.25	1.541507	1.55	0.200421	2.85	0.04134	4.15	0.009439
0.3	1.37246	1.6	0.187955	2.9	0.039006	4.2	0.008927
0.35	1.232707	1.65	0.176335	2.95	0.036809	4.25	0.008444
0.4	1.114529	1.7	0.165496	3	0.03474	4.3	0.007988
0.45	1.012915	1.75	0.15538	3.05	0.032791	4.35	0.007557
0.5	0.924419	1.8	0.145931	3.1	0.030955	4.4	0.007149
0.55	0.846568	1.85	0.137102	3.15	0.029225	4.45	0.006764
0.6	0.777522	1.9	0.128846	3.2	0.027595	4.5	0.0064
0.65	0.715873	1.95	0.121123	3.25	0.026059	4.55	0.006056
0.7	0.66052	2	0.113894	3.3	0.024611	4.6	0.00573
0.75	0.610582	2.05	0.107125	3.35	0.023245	4.65	0.005423
0.8	0.565347	2.1	0.100784	3.4	0.021958	4.7	0.005132
0.85	0.524226	2.15	0.094841	3.45	0.020744	4.75	0.004857
0.9	0.48673	2.2	0.089269	3.5	0.019599	4.8	0.004597
0.95	0.452447	2.25	0.084043	3.55	0.018519	4.85	0.004351
1	0.421024	2.3	0.07914	3.6	0.0175	4.9	0.004119
1.05	0.392163	2.35	0.074538	3.65	0.016538	4.95	0.003899
1.1	0.365602	2.4	0.070217	3.7	0.015631	5	0.003691

При $x < 0,01$ $K_0(x) \approx -\ln(x)$, при $x > 5$ $K_0(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}$.

**Словник основних термінів,
використовуваних у програмі ModFlow**

<i>Add</i>	Додати
<i>Advanced</i>	Розширений
<i>All</i>	Всі
<i>Annotation</i>	Пояснення (на графіках)
<i>Assign</i>	Присвоїти
<i>Boundaries</i>	Межі
<i>Cell</i>	Комірка
<i>Circle</i>	Коло
<i>Color shading</i>	Кольорове затінення
<i>Column</i>	Колонка
<i>Concentration</i>	Концентрація
<i>Conductivity</i>	Провідність
<i>Contours</i>	Контури (ізолінії)
<i>Copy</i>	Копіювати
<i>Delete</i>	Видалити
<i>Direction</i>	Напрямок
<i>Drain</i>	Дрена
<i>Edit</i>	Редагувати
<i>Elevation</i>	Висота (рівень) підземних вод
<i>Equipotentials</i>	Еквіпотенціали
<i>Erase</i>	Стерти
<i>Evapotranspiration</i>	Випаровування
<i>Exit</i>	Вихід (з меню)
<i>Export</i>	Запис до зовнішнього файлу
<i>File</i>	Файл
<i>Flow budget</i>	Баланс потоків води
<i>G.H.B</i>	Межа загального типу
<i>Go to</i>	Перейти до ...
<i>Grid</i>	Сітка
<i>Head</i>	Напір (рівень)
<i>In</i>	Вхідний (потік)

<i>Initial</i>	Початковий
<i>Input</i>	Ввести
<i>Layer</i>	Шар
<i>Magnitude</i>	Величина
<i>Next</i>	Наступний
<i>Observation</i>	Спостереження
<i>Options</i>	Параметри вибору
<i>Out</i>	Вихідний (потік)
<i>Output</i>	Вивід результатів
<i>Overlay</i>	Накласти (карти)
<i>Particles</i>	Частинки
<i>Pathline</i>	Траєкторія течії
<i>Polygon</i>	Багатокутник
<i>Previous</i>	Попередній
<i>Properties</i>	Властивості
<i>Pumping</i>	Нагнітання
<i>Recharge</i>	Живлення (інфільтрація)
<i>Reset</i>	Установити заново
<i>River</i>	Річка
<i>Row</i>	Рядок
<i>Run</i>	Виконати
<i>Select</i>	Вибрати
<i>Setup</i>	Встановити параметри
<i>Single</i>	Одиничний
<i>Specific yield</i>	Питома водоемність
<i>Steady state flow</i>	Усталений потік
<i>Storage</i>	Ємність
<i>Tools</i>	Інструменти
<i>Transient flow</i>	Неусталений потік
<i>Translate</i>	Перевести, ввести дані до розрахункового модулю
<i>Velocity</i>	Швидкість
<i>Wall</i>	Стіна
<i>Wells</i>	Свердловини
<i>Zoom in (out)</i>	Збільшити (зменшити) масштаб
<i>Zone budget</i>	Баланс у зоні

Предметний покажчик

- Аналогія 16
- Апроксимація 65
 - області фільтрації 43
- Гідрогеологічні об'єкти 7
 - параметри 16
- Граничні умови 50
- Джерела (стоки)
 - лінійні 34
 - об'ємні 34, 35
 - площинні 34, 35
 - точкові 33
- Екстраполяція 65
- Інтерполяція 65
- Масштабні коефіцієнти 16
- Метод джерел (стоків) 33
- Метод факторно-діапазонного аналізу 57, 60
- Модель
 - адекватна 55
 - вірогідна 55
 - детермінована 65
 - інженерна 55
 - математична 11
 - повна 11
 - стохастична 65
 - фізична 11
- Моделювання 7
 - етапи 9
 - задачі 12
 - масштаб 11
 - похибки 56
 - методи аналітичні 33
 - – чисельні 43
- Подібність
 - афінна 14
 - геометрична 14
 - константи 17
 - критерії 17, 19
 - механічна 14
 - часова 15
- Поле
 - геологічне 7
 - фізичне 7
- Прогноз
 - класифікація 62
 - методи 64
 - ознаки 62
- Рівняння балансу води 47
- Різницеве рівняння 45, 46, 48
- Розрахункова схема 23
- Скінченнорізницева сітка 44
 - блок 43
 - крок 43
- Схема
 - пласт-півплощина 39
 - пласт-квадрант 39
 - різницева явна 48, 49
 - різницева неявна 48, 49
- Схематизація 23
 - джерел водного балансу 31
 - меж області фільтрації 27
 - неоднорідності 28
 - структури фільтраційного потоку 24

Навчальне видання

Рудаков Дмитро Вікторович

МОДЕЛЮВАННЯ В ГІДРОГЕОЛОГІЇ

Навчальний посібник

Редактор Ю.В. Рачковська

Підписано до друку 24.02.11. Формат 30×42/4
Папір офсет. Ризографія. Ум. друк. арк. 4,9. Обл.-вид. арк. 4,9є.
Наклад 50 прим. Зам. № 41

Підготовлено до друку та видруковано
у Державному ВНЗ «Національний гірничий університет»
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК №1842 від 11.06.2004

49005, м. Дніпропетровськ, просп. К. Маркса, 19