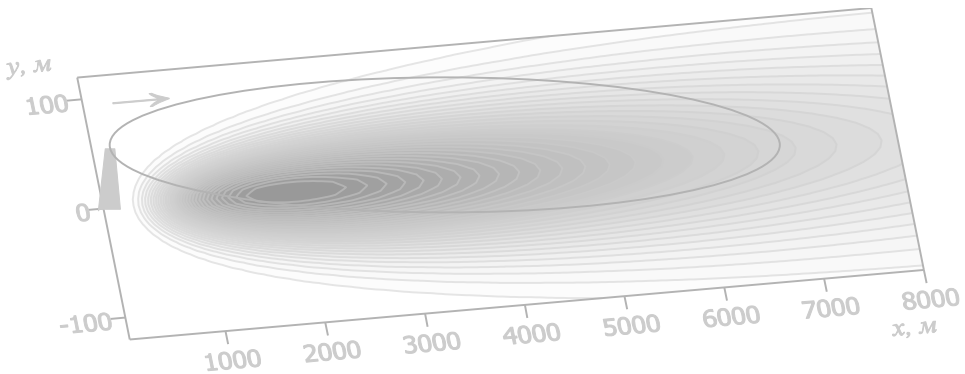


Д. В. РУДАКОВ

**МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ
В ОХОРОНІ
НАВКОЛИШНЬОГО СЕРЕДОВИЩА**

$$\varphi(x, y) = \frac{q}{\pi\sigma_y\sigma_z u} \exp\left(-\frac{h^2}{2\sigma_z^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right)$$



2004

Міністерство освіти і науки України
Дніпропетровський національний університет

Д. В. РУДАКОВ

**МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ
В ОХОРОНІ
НАВКОЛИШНЬОГО СЕРЕДОВИЩА**

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Видавництво
Дніпропетровського університету
2004

ББК 26.23я73+26.22я73+26.35я73
УДК 502:519.6(075.8)
Р 83

Рецензенти:
д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. Г. Гоман**
д-р техн. наук, проф. **М. М. Біляєв**

Друкується за рішенням Вченої Ради
ДНІПРОПЕТРОВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ.

Протокол №6 від 11.03.04

Рудаков Д. В.

Р 83 Математичні моделі в охороні навколишнього середовища:
Навчальний посібник. – Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту,
2004. – 160 с.
ISBN 996-551-143-2

У навчальному посібнику викладені основи математичних моделей, які використовуються при дослідженні процесів розповсюдження шкідливих речовин в атмосфері, поверхневих і підземних водах. Разом із загальними питаннями розглянуті окремі практично важливі процеси у навколишньому середовищі. Багато уваги приділено застосуванню викладених математичних моделей, зокрема, у лабораторному практикумі.

Призначено для студентів старших курсів природознавчих та технічних факультетів вищих навчальних закладів, які спеціалізуються у галузі охорони навколишнього середовища.

ISBN 996-551-143-2

© Рудаков Д.В., 2004.

© Видавництво Дніпропетровського
університету 2004.

ПЕРЕДМОВА

За останній час з'явилося чимало монографій та підручників з різних аспектів використання математичних методів для розв'язання екологічних проблем. Представлений навчальний посібник має на меті систематизувати на рівні початківця ті математичні моделі, які набули широкого застосування при дослідженні процесів поширення забруднюючих речовин у повітрі, водному середовищі та підземних водах. Ці процеси, різні за проявами, об'єднує диференціальне рівняння переносу та дифузії, а також подібний математичний апарат, що використовується для їхнього опису. Посібник не претендує на всеосяжність; його можна розглядати лише як вступ до поглибленого вивчення більш складних моделей, що описують реальні процеси в оточуючому природному середовищі.

Серед цих процесів слід відзначити забруднення повітряного басейну великих міст викидами автотранспорту та підприємствами важкої, гірничодобувної промисловості та енергетики, атомних станцій, яке відбувається за умов складних атмосферних процесів; забруднення поверхневого шару ґрунту внаслідок опадів і осадження шкідливих домішок із повітря. Важливого значення набуло прогнозування змін гідрологічного режиму поверхневих водотоків та водоймищ, їхнє забруднення, накопичення токсичних речовин у донних відкладеннях. Досить широким є коло практичних застосувань теорії фільтрації у пористому та тріщинуватому середовищах: підйом ґрунтових вод (підтоплення), міграція шкідливих речовин у підземних водах та забруднення джерел водопостачання, зсувні процеси, оцінка запасів підземних вод, фільтрація газу та нафти, затоплення відпрацьованих шахт, рекультивация ґрунтів у районах видобування корисних копалин, надійна ізоляція високотоксичних та радіоактивних відходів у підземних сховищах.

Вивчення даного курсу супроводжується виконанням лабораторних робіт на ПЕОМ. Змістом кожної роботи є обчислювальна реалізація певної математичної моделі, спрямованої на розв'язання задачі прогнозу конкретних характеристик екологічного стану навколишнього середовища. Лабораторні роботи

рекомендується виконувати в одному з середовищ комп'ютерної математики (наприклад, Maple, MathLab, MathCad), які мають розвинуті засоби обчислень та графічної обробки результатів. При адаптації до конкретних навчальних курсів вихідні дані в роботах можуть бути замінені.

Посібник передбачає достатній рівень математичної підготовки і орієнтований на студентів старших курсів природознавчих та технічних факультетів вищих навчальних закладів, знайомих з курсами вищої математики та диференціальних рівнянь у частинних похідних.

Автор глибоко вдячний доктору фізико-математичних наук, професору О. Г. Гоману за ретельний перегляд рукопису та цінні зауваження.

КЛАСИФІКАЦІЯ МОДЕЛЕЙ ПРОГНОЗУ СТАНУ НАВКОЛИШНЬОГО СЕРЕДОВИЩА

Метою математичного моделювання в проблемі охорони навколишнього середовища є оцінка впливу господарської діяльності людини на стан і зміни природного середовища, зокрема, аналіз і прогноз якості повітря, поверхневих і підземних вод з точки зору відповідності концентрацій шкідливих речовин існуючим стандартам.

Математичні моделі застосовуються з метою оцінки екологічного збитку в результаті забруднення навколишнього середовища і для обґрунтування заходів щодо запобігання або зниження рівня забруднення.

Математичні моделі є складовою частиною моніторингу навколишнього середовища, який являє собою систему спостережень, оцінки і прогнозу. Моніторинг ведеться в приземному і прилеглому шарах атмосфери, в гідросфері (у поверхневих і підземних водах), у ґрунтах.

Вихідними даними для моделей є умови поширення забруднюючих речовин (характеристики течій у повітряному і водному середовищі), і параметри викидів. Результати моделювання звичайно представляються у вигляді розподілу концентрацій шкідливих домішок і їхнього масопотоку на границях розділу різних середовищ (осадження на ґрунт, підземний стік у ріки і т. ін.).

Основною характеристикою в таких моделях є концентрація шкідливої домішки у воді (повітрі). Звичайно використовується масова концентрація, що виражається в кг/м^3 (г/м^3 , мг/л і т. п.). Для газоподібних забруднень може застосовуватися також об'ємна концентрація, яка виражається в частинах домішки на мільйон (млн^{-1} чи $10^{-4}\%$ від об'єму).

При визначенні ступеня впливу шкідливих речовин на людину, тваринний і рослинний світ необхідно враховувати: 1) хімічний і механічний склад забруднення, 2) його концентрацію, 3) тривалість впливу. Для кількісної характеристики небезпеки окремої речовини використовуються гранично допустимі концентрації (ГДК) чи стандарти якості повітря і води. Для по-

вітря виділяють також максимальні разові ГДК (на інтервалі часу 20–30 хв – 1 година) і середньодобові ГДК. При наявності у воді (повітрі) декількох шкідливих речовин з концентрацією φ_i їхній вплив необхідно підсумовувати, при цьому має виконуватися співвідношення

$$\sum_{i=1}^n \frac{\varphi_i}{\text{ГДК}_i} \leq 1.$$

У методичному відношенні серед існуючих моделей прогнозу стану навколишнього середовища можна виділити: 1) прості детерміновані (балансові) моделі, 2) статистичні, 3) моделі, засновані на розв'язках диференціальних рівнянь, 4) фізичні моделі. За масштабом охоплення вони підрозділяються на локальні та регіональні. Крім того, в залежності від повноти вихідних даних про описуваний процес, можуть використовуватися моделі з детермінованими (цілком визначеними) чи з розподіленими (залежними від випадкової величини) параметрами.

Прості детерміновані моделі ґрунтуються на емпіричних даних і балансових співвідношеннях, записаних для деякого об'єму водного чи повітряного середовища. За допомогою таких моделей можна одержати орієнтовані оцінки основних показників забруднення для великих територій (місто, область і т. ін.).

Статистичні моделі будуються за даними спостережень забруднення повітря (води) і даними моніторингу з наступним аналізом часових рядів. Такі моделі непридатні для тривалих прогнозів, однак зручні в застосуванні, мають невисоку вартість розробки і використовуються переважно при обробці даних моніторингу.

Для оперативних прогнозів поширення домішки в навколишньому середовищі, особливо при відсутності детальної інформації про структуру течій і склад забруднень, доцільно застосування моделей, заснованих на аналітичних розв'язках диференціальних рівнянь у частинних похідних. Більшість таких розв'язків отримано для простих схем течій, при постійних або заданих спеціальним чином параметрах середовища. Незважа-

ючи на ці обмеження, аналітичні моделі через свою відносну просту реалізацію, незамінні при аналізі основних закономірностей досліджуваного процесу.

При вирішенні практичних задач в області охорони навколишнього середовища найбільш широко застосовуються чисельні алгоритми розв'язку рівнянь у частинних похідних. Як правило, вони базуються на методах скінчених різниць або скінчених елементів. Ці алгоритми дозволяють детально врахувати складну структуру течій і форму границь області, особливості рельєфу тощо. У той же час вони потребують розробки спеціального програмного забезпечення, обґрунтування точності і збіжності.

Фізичне моделювання являє собою відтворення досліджуваного процесу в лабораторних умовах з метою обґрунтування параметрів математичної моделі. Воно виконується за допомогою лотків, каналів, аеродинамічних труб, інших експериментальних установок. У той же час існує ряд труднощів, унаслідок яких однозначний перенос результатів фізичного моделювання на реальні об'єкти неможливий: відповідність масштабів, погодженість критеріальних чисел (наприклад Re , Fr), збереження цілісності досліджуваних зразків і т. д.

ПЕРЕЛІК ОСНОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

- A – альbedo земної поверхні (б/р)*, прискорення, викликане силою Кориоліса (м/с^2);
- a – п'езопровідність водоносного шару ($\text{м}^2/\text{с}$);
- B, b – ширина русла на рівні поверхні води та на рівні дна (м);
- C – коефіцієнт Шезі ($\text{м}^{0.5}/\text{с}$);
- c_v, c_p – теплоємність повітря при постійному об'ємі та тиску ($\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$);
- D_x, D_y, D_z – коефіцієнти дифузії або дисперсії в напрямках x, y, z відповідно ($\text{м}^2/\text{с}$);
- d – діаметр частинок (м), диференціал;
- E – інтенсивність випару ($\text{кг}/(\text{м}^2\cdot\text{с})$);
- E_s, E_f – модулі деформації пористого середовища та води (Па^{-1});
- g – прискорення сили тяжіння ($\approx 9.81 \text{ м/с}^2$);
- H – напір (м), приплив тепла з атмосфери до земної поверхні за рахунок теплопровідності ($\text{Вт}/\text{м}^2$); товщина шару поширення домішок в атмосфері (м);
- h – глибина потоку (м), висота викиду домішки в атмосфері (м);
- I – похил вільної поверхні води в руслі (б/р);
- I_0 – похил дна русла (б/р), початковий градієнт фільтраційної течії (б/р), сонячна стала ($\approx 1368 \text{ Вт}/\text{м}^2$);
- I_g – гідравлічний похил (б/р);
- I_λ – потік сонячної радіації з довжиною хвилі λ ($\text{Вт}/\text{м}^2$);
- K – коефіцієнт фільтрації або гідравлічна провідність пористого середовища ($\text{м}/\text{с}$), витратна характеристика руху води у відкритих руслах ($\text{м}^3/\text{с}$);
- K_1, K_2 – параметри хімічних реакцій у водному середовищі (с^{-1});
- k – коефіцієнт турбулентної в'язкості ($\text{м}^2/\text{с}$);
- L_m – довжина шляху перемішування у моделі турбулентності в приземному шарі повітря (м);

* б/р – безрозмірна величина

- L, l – довжина (м);
 m – товщина водоносного шару (м);
 N – концентрація речовини в твердій фазі у водонасиченому пористому середовищі (кг/м³);
 n – пористість (б/р), шорсткість відкритих русел (б/р);
 n_w, n_e – активна та ефективна пористість (б/р);
 P – тиск (Па);
 Q – об'ємна витрата (м³/с);
 q – інтенсивність внутрішніх джерел маси, масова витрата (кг/с), парціальний тиск (Па);
 R – гідравлічний радіус (м), газова стала (Дж/(К·моль));
 r – радіус, відстань (м);
 S – радіаційний баланс (Вт/м²), водо- та нафтонасиченість пористого середовища (б/р);
 T – температура (К);
 t – час (с);
 u, v, w – компоненти швидкості в напрямках x, y, z відповідно (м/с);
 \vec{V} – швидкість (м/с);
 W – об'єм (м³);
 w_s – швидкість осідання частинок внаслідок гравітації (м/с);
 x, y, z – декартові координати (м);
 δ_L, δ_T – параметри подовжньої та поперечної дисперсії у пористому середовищі (м);
 γ – питома вага (Н/м³), градієнт температури (К/м);
 ξ, η – координати (м);
 ϕ – географічна широта (градус);
 φ – масова концентрація речовини у водному або повітряному середовищі (кг/м³);
 κ – константа Кармана (≈ 0.4), проникність пористого середовища (м²);
 λ – швидкість поглинання домішок з повітря на поверхні землі (м/с), параметр розпаду речовини у підземних водах (с⁻¹);
 μ – коефіцієнт динамічної в'язкості (Н·с/м²);

- θ – насиченість пористого середовища (б/р), кут (град);
 ρ – густина (кг/м³), відстань між точками (м);
 σ – параметр нейтралізації домішки в атмосфері (с⁻¹), поверхневий натяг (Н/м);
 ν – кінематична в'язкість (м²/с);
 ω – площа поперечного перетину (м²), кутова швидкість обертання землі (с⁻¹);
 ψ – всмоктуючий тиск у ненасиченому пористому середовищі (Па);
 Δ – приріст або різниця між величинами (б/р);

Ei – інтегральна показникова функція, $Ei(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt$;

erf – інтеграл ймовірності, $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$,

$erfc(x) = 1 - erf(x)$;

K_0 – функція Макдональда нульового індексу,

$$K_0(x) = \int_0^{\infty} \frac{\cos(xt)}{\sqrt{t^2 + 1}} dt;$$

$\delta(\xi)$ – дельта-функція Дірака, для функції $f(\xi)$, безперервної при $x = \xi$, виконується співвідношення

$$\int_a^b \delta(\xi) f(x - \xi) d\xi = \begin{cases} 0, & x < a \text{ або } x > b, \\ f(x)/2, & x = a \text{ або } x = b, \\ f(x), & a < x < b; \end{cases}$$

Δ – оператор Лапласа, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

1. ПРОЦЕСИ В АТМОСФЕРІ

1.1. ТЕПЛОВИЙ БАЛАНС

Розрахунок теплового балансу необхідний для вивчення процесів тепло- та масообміну в приземному шарі повітря і верхньому шарі ґрунту. Тепловий баланс земної поверхні записується у вигляді [1.8, 1.28]:

$$S + H + B - V = 0, \quad (1.1)$$

де S – радіаційний баланс; H – приплив тепла з атмосфери до поверхні за рахунок теплопровідності; B – приплив тепла з ґрунту; $V = LE$ – витрата тепла на випар; E – інтенсивність випару, $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$; $L = 598$ Дж/кг – прихована теплота паротворення. Всі величини в (1.1) мають розмірність $\text{Вт}/\text{м}^2$.

Радіаційний баланс розраховується на підставі припливу і поглинання сонячної радіації в атмосфері Землі. Під сонячною радіацією розуміється потік променистої енергії, що випускається Сонцем. Величина потоку сонячної радіації, що падає перпендикулярно на поверхню у верхній границі атмосфери Землі, називається сонячною сталою I_0 . Значення I_0 складає $1368 \text{ Вт}/\text{м}^2$, при цьому воно може трохи змінюватися при спалахах і появі плям на Сонці, а також унаслідок зміни відстані від Землі до Сонця при обертанні Землі по орбіті.

В атмосфері Землі відбувається розсіювання сонячних променів молекулами газів, крапельками водяної пари, частками пилу. Частина розсіяної радіації іде назад у космос. Крім того, деякі гази (O_3 , CO_2) поглинають сонячну радіацію на певних лініях і смугах спектра випромінювання. Потік монохроматичної радіації I_λ з довжиною хвилі λ , що пройшла через атмосферу Землі до висоти z , можна визначити за формулою

$$I_\lambda = I_{0\lambda} \exp\left(-\int_z^\infty k_1 dz\right) = I_{0\lambda} \exp(-\tau(z)), \quad (1.2)$$

де $I_{0\lambda}$ – початкова густина випромінювання для хвилі довжиною λ (Вт/м²); $k_1(z)$ – параметр розсіювання, м⁻¹; $\tau(z)$ – оптична товщина атмосфери на висоті z . Частку сонячної радіації, що досягає поверхні Землі при прямовисному падінні променів $P_\lambda = \exp(-\tau(z))$, називають коефіцієнтом прозорості атмосфери. Якщо промені падають на поверхню Землі похило під кутом θ до вертикалі, то, зневажаючи скривленням променів в атмосфері, можна одержати $I_\lambda = I_{0\lambda} (P_\lambda)^{\sec(\theta)}$.

Сумарна радіація, що досягає земної поверхні S_Σ , складається з прямої і розсіяної радіації (рис. 1.1). При хмарній погоді розсіяна (дифузна) радіація може переважати над прямою. Відбита радіація S_e визначається як $A \cdot S_\Sigma$, де A – альbedo. Для водойм при прямовисному падінні променів A може зменшуватись до 0,005, для ґрунтів (у залежності від вологості) значення A складає 0,15–0,5, для снігу воно досягає 0,95.

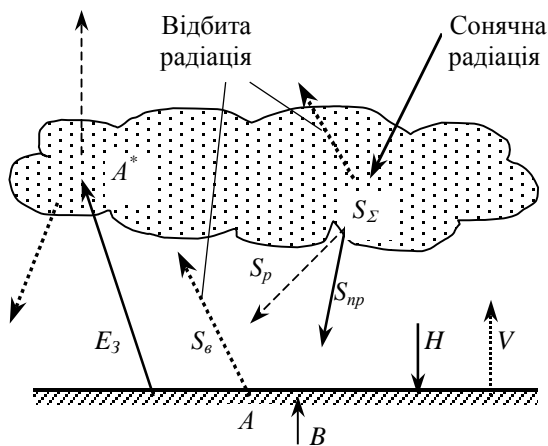


Рис. 1.1. Схема теплового балансу земної поверхні

Земна поверхня також випромінює тепло як майже чорне тіло переважно в довгохвильовому спектрі. З урахуванням цього її радіаційний баланс розраховується як різниця між поглиненою нею радіацією та власним випромінюванням на підставі співвідношення [1.8; 1.16]:

$$S = (1 - A')S_{\Sigma} - (E_3 - (1 - A^*)E_a), \quad (1.3)$$

де E_3 – випромінювання Землі, E_a – випромінювання атмосфери, що досягає поверхні Землі, A' та A^* – короткохвильове та довгохвильове альbedo поверхні.

Приплив тепла з атмосфери можна визначити за формулою

$$H = \lambda_n \left(\gamma_0 + \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \lambda_n (\gamma_0 - \gamma), \quad (1.4)$$

де T – температура, К; γ – її градієнт, К/м; λ_n – коефіцієнт теплопровідності повітря, Вт/(м·К); γ_0 – сухо-адіабатичний градієнт температури, що складає близько $0.98 \cdot 10^{-2}$ К/м. Як правило, потік тепла спрямований униз. Однак у випадку інверсії має місце зворотнє.

Інверсія – це шар атмосфери, в якому температура зростає нагору ($\gamma < 0$). Для інверсії можна визначити висоту нижньої границі, товщину шару і загальне збільшення температури в ньому. У шарі інверсії значно послаблюється рух повітря, зменшується вертикальний перенос, а частки повітря в інверсійному шарі при адіабатичному процесі можуть робити коливальні рухи по вертикалі [1.8].

Приплив тепла до земної поверхні можна також розрахувати за формулою

$$H = -\rho c_p k_h \frac{\partial T}{\partial z} \approx -\rho c_p k_h \frac{T_2 - T_1}{z_2 - z_1}, \quad (1.5)$$

де ρ – густина повітря, кг/м³; c_p – його теплоємність при постійному тиску, 1005 Дж/(кг·К); k_h – коефіцієнт турбулентного переносу тепла, який визначається експериментально, м²/с; T_2 і T_1 – температура повітря на висотах z_2 і z_1 відповідно, К.

Величину H можна розрахувати також за емпіричною формулою Дайєра [1.8]:

$$H = 240(\Delta T_{14})^{3/2} \text{ Вт/м}^2,$$

де ΔT_{14} – різниця температур повітря на висотах 1 м та 4 м, К.

Для розрахунку випару можуть бути використані аеродинамічний чи енергетичний методи [1.28]. Перший з них ґрунтується на рівнянні переносу водяної пари

$$E = -\rho \frac{\varepsilon}{P} k_v \frac{\partial q}{\partial z}, \quad (1.6)$$

де P – тиск повітря, Па; $\varepsilon = M[\text{H}_2\text{O}]/M_n \approx 0,62$ – відношення молекулярної ваги води до молекулярної ваги повітря; k_v – коефіцієнт турбулентного переносу водяної пари, м²/с; q – парціальний тиск водяної пари, Па. Для k_v можна використовувати, наприклад, апроксимацію виду [1.28]:

$$k_v = \kappa^2 \frac{(u_2 - u_1)(z_2 - z_1)}{(\ln(z_2/z_1))^2}, \quad (1.7)$$

де u_1 і u_2 – середні швидкості вітру на висотах z_1 і z_2 , κ – константа Кармана.

За допомогою наведених формул можна оцінити тепловий баланс та інтенсивність випару [1.28]. Нехай $u_1=1$ м/с, $z_1=1$ м, $u_2=1.2$ м/с, $z_2=2$ м, $\Delta q_{12} = -100$ Па. За допомогою (1.7) визначимо k_v , який складає близько 0.07 м²/с. Тоді з формули (1.6), записаної в різнищевому вигляді для висот 1 та 2 м, одержимо $E \approx 1.86 \cdot 10^{-2}$ г/(см²·годину). Тоді $V \approx 260$ кал/(см²·добу) або 260 ланглей* за добу. Якщо прийняти $k_v = k_h$, то на нагрівання повітря витрачається потік тепла $H = 174.2$ кал/(см²·добу), або 174.2 ланглей за добу.

Відповідно до енергетичного підходу, величину E можна обчислити з рівняння балансу (1.1):

$$LE = S + H + B \approx \frac{S + B}{1 + \beta}, \quad \beta = \frac{c_p P}{L\varepsilon} \frac{T_2 - T_1}{q_2 - q_1},$$

де величини T_1 , T_2 , q_1 , q_2 визначаються за даними вимірів.

Для практичних розрахунків можуть бути використані емпіричні формули [1.28], що звичайно мають вигляд $E = k f(u) \Delta q$, де k – деякий коефіцієнт; $f(u)$ – залежність від швидкості вітру;

* 1 ланглей = $1.163 \cdot 10^{-3}$ кВч/см²

Δq – різниця тисків насиченої і ненасиченої водяної пари (дефіцит насичення).

1.2. КОНДЕНСАЦІЯ І СУБЛІМАЦІЯ ВОДЯНОЇ ПАРИ. ОПАДИ

Конденсація являє собою перехід пари в рідкий стан, сублімація – в лід. Конденсація можлива при пересиченні повітря водяною парою, тобто при $q > q_s$; сублімація – при $q > q_i$, де q – парціальний тиск водяної пари, q_s і q_i – парціальний тиск водяної пари при повному насиченні повітря для води і льоду.

Пара концентрується звичайно на ядрах конденсації, що являють собою або розчинні, або нерозчинні змочувані частинки. За розмірами виділяють: 1) дрібні ядра радіусом r від 0,005 до 0,2 мкм (ядра Айткена), активні при великих пересиченнях (більш як 20%); 2) хмарні ядра, активні вже при пересиченні близько 1%, радіусом $r=0,2 \div 1$ мкм; 3) гігантські ядра радіусом більш 1 мкм (переважно кристали солей, що утворились після випаровування крапель морської води).

Розподіл ядер за радіусом $N(r)$ може бути описаний емпіричною формулою [1.8]

$$\frac{dN}{dr} = \frac{c}{2,3} \frac{1}{r^4}, \quad c = \frac{2\sigma}{R_n \rho_w T}, \quad (1.8)$$

де σ – коефіцієнт поверхневого натягу в системі «пара-вода», при $T=0^\circ \text{C}$ $\sigma=7.464 \cdot 10^{-2}$ Н/м; R_n – газова стала для пара; ρ_w – густина води. Звичайна кількість ядер конденсації складає кілька сотень у 1 см^3 ; іноді може досягати декількох десятків тисяч у 1 см^3 . Значення N зменшується з висотою [1.8]. Опади вимивають ядра конденсації з атмосфери.

Кристали утворюються на крижаних ядрах, що виникають при замерзанні крапель або їхньому контакті з крижаними ядрами. Зміну числа крижаних ядер при спаді температури можна приблизно описати залежністю

$$N = N_0 e^{0,6(T_n - T)},$$

де T_n – температура порога активності крижаних ядер, °С. Число крижаних ядер звичайно складає 10^{-5} від числа ядер конденсації, при низьких температурах воно значно збільшується.

Результатом конденсації є утворення хмар. Причинами конденсації є: 1) контакт вологого повітря з охолодженою поверхнею, що підстилає; 2) змішування холодного і вологого теплого повітря; 3) адіабатичне охолодження при розширенні повітря. Утворення хмар може супроводжуватися вертикальними, похило-висхідними чи хаотичними рухами. Кількісно хмарність характеризується часткою небесного схилу вище 15° над обрієм, вкритого хмарами. Показник хмарності суттєво впливає на стан атмосфери, отже, і на умови розсіювання шкідливих домішок.

Зі збільшенням розмірів крапель і кристалів вони можуть набути помітну швидкість падіння і випасти з хмар. Великі краплі утворюються внаслідок: а) гравітаційної коагуляції; б) молекулярно-кінетичного руху; в) електростатичних сил притягання. Суть гравітаційної коагуляції полягає в тому, що великі краплі доганяють дрібні і зливаються з ними. Одночасно з цим великі краплі можуть розпадатися на дрібні через опір повітря. Спрощена модель росту краплі при конденсації розглянута в [1.8]. Згідно з цією моделлю, яка підтверджена експериментальними даними, найшвидше зростання крапель відбувається у перші 10 хвилин після їх утворення, після чого збільшення суттєво уповільнюється. Діаметр краплі у перші хвилини її росту збільшується пропорційно $t^{1/2}$, де t – час.

Кількість опадів характеризується: 1) товщиною шару води h , що випала після опадів, який може бути утворений при відсутності випару і стоку, мм; 2) водністю W (масою крапель в 1 м^3); 3) інтенсивністю I , мм/година. Зазначені параметри пов'язані співвідношенням $I = \bar{W} \cdot \bar{V}$, де \bar{W} – середня водність, \bar{V} – середньозважена швидкість падіння крапель. У залежності від типу хмар середня водність складає в діапазоні температур $+10 \div 15^\circ\text{C}$ від 0.18 до 0.35 $\text{г}/\text{м}^3$, хоча в окремих випадках може досягати 4 $\text{г}/\text{м}^3$, а у тропіках – до 20 $\text{г}/\text{м}^3$.

Краплі дощу мають діаметр від 0,05 до 0,58 см, мряка – 0,005–0,05 см. При зміні діаметра краплі від 2 мкм до 0,58 см

швидкість її падіння зростає від 0,012 до 917 см/с, число Рейнольдса Re – від $2,5 \cdot 10^{-5}$ до 3600. Розподіл крапель дощу за розміром може бути описаний експонентною залежністю виду $n = n_0 e^{-\lambda d}$, де λ – емпіричний параметр, d – діаметр крапель. Розміри крупинок льоду, сніжинок можуть досягати 0,5 см, швидкість їхнього падіння – 2,5 м/с, хоча звичайно вона не вище 0,8 м/с.

Туман подібний до хмари, яка конденсується в приземному шарі атмосфери. У ньому містяться переважно дрібні краплі розміром 5–7 мкм. Відрізняють такі види туману: 1) радіаційний, який утворюється вночі внаслідок випромінювання повітря, а потім і крапель, і зникає після сходу Сонця; 2) адвективний, який утворюється в теплом повітрі, яке натікає на холодну поверхню землі; 3) фронтальний, який утворюється перед теплим фронтом у насиченому паром повітрі; 4) туман випаровування, що утворюється при натіканні холодного повітря на тепле море. Рух повітря в тумані, як правило, уповільнений, тому поблизу поверхні можуть концентруватись шкідливі домішки.

При випаданні опадів відбувається осадження домішок, що містяться в нижньому шарі атмосфери, що називається також мокрим випаданням. Швидкість зменшення концентрації домішки в результаті випадання опадів σ_2 (с^{-1}) можна приблизно оцінити як $\sigma_2 = I \cdot d \cdot e$, де e – параметр ефективності захоплення краплями часток домішки, встановлюваний емпірично. При сильному дощу відбувається повне вимивання домішки з атмосфери.

За рахунок більшої поверхні сніжинок вагомій домішки вимиваються снігом у 3–4 рази інтенсивніше, ніж дощем, при тій же кількості опадів. Газоподібні домішки краще вимиваються дощем.

1.3. СИЛИ І РУХ В АТМОСФЕРІ

Рух атмосферного повітря відбувається за рахунок сили градієнта тиску і сили ваги. Інші сили – відхиляюча сила обертання

Землі, відцентрова сила при криволінійному русі, сила внутрішнього тертя, – тільки гальмують чи відхиляють рух.

Складові сили градієнта тиску можна визначити з балансу питомих сил, що діють на одиницю об'єму повітря в елементарному паралелепіпеді, вирізаному в атмосфері (рис. 1.2). З урахуванням сили тяжіння маємо

$$P_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad P_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}, \quad P_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g, \quad (1.9)$$

де ρ – густина повітря, P – тиск.

При відсутності значних вертикальних прискорень ($P_z=0$) динамічні процеси визначаються компонентами P_x і P_y .

Горизонтальну складову руху повітря називають вітром. Напрямок вітру характеризується румбом. Швидкість вітру звичайно вимірюється на висоті 10 м. З висотою вона може досягати 100 м/с, але завжди менше швидкості звуку. Швидкість вітру трохи більше взимку; її розподіл за висотою може змінюватись протягом доби.

Сила Кориоліса чи відхиляюча сила обертання Землі визначається як векторний добуток швидкості руху повітря $\vec{V}(u, v, w)$ на поверхні Землі і кутової швидкості обертання Землі $\vec{\omega}$ [1.8]:

$$\vec{A} = [\vec{V} \cdot 2\vec{\omega}]. \quad (1.10)$$

Вектор $\vec{\omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ спрямований паралельно до земної осі з півдня на північ. Визначимо праву систему координат у довільній точці на поверхні Землі в такий спосіб: вісь Ox направимо вздовж меридіана на південь, вісь Oy – по паралелі на схід, вісь Oz – по вертикалі нагору (рис. 1.3). Тоді складові векторів \vec{A} і $\vec{\omega}$ в цій системі координат будуть:

$$\begin{aligned} A_x &= 2(v\omega_z - w\omega_y) = 2\omega_0 v \sin\phi, \\ A_y &= 2(w\omega_x - u\omega_z) = -2\omega_0(w \cos\phi + u \sin\phi), \\ A_z &= 2(u\omega_y - v\omega_x) = 2\omega_0 v \cos\phi, \\ \omega_x &= -\omega_0 \cos\phi, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = \omega_0 \sin\phi, \end{aligned}$$

де $\omega_0 = 2\pi/86164 \text{ c}^{-1}$; ϕ – широта. Під дією сили Кориоліса частки, що рухаються в північній півкулі до сходу ($A_x > 0, v > 0$), відхиляються на південь, а ті, що рухаються до півдня ($A_y < 0, u > 0$) – на захід. У південній півкулі, навпаки, відхилення завжди відбувається вліво. При західному вітрі ($v > 0, A_z > 0$) відхилення відбувається нагору, при східному – униз. Висхідні рухи ($w > 0$) відхиляються на захід, ті що сходять – на схід. Звичайно роль сили Кориоліса невелика, а максимальне прискорення при сильному вітрі не перевищує 0,05%g.

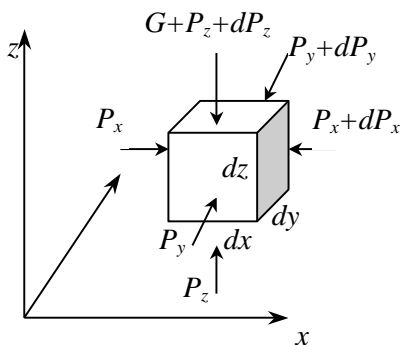


Рис. 1.2. Баланс сили градієнта тиску та сили тяжіння в атмосфері

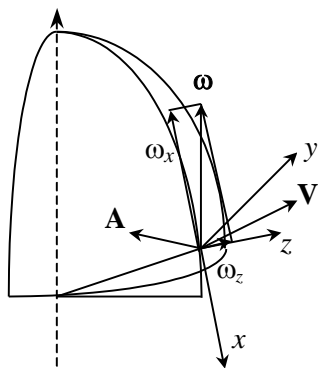


Рис. 1.3. Розташування векторів V, ω та A

Прямолінійний рівномірний рух повітря під дією сил Кориоліса і горизонтального градієнта тиску називається гострофічним вітром. Якщо ці сили врівноважують одна одну, тобто $P_x = A_x, P_y = A_y$, то складові геострофічного вітру u_g і v_g дорівнюють

$$u_g = -\frac{1}{\rho l} \frac{\partial P}{\partial y}, \quad v_g = -\frac{1}{\rho l} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad l = 2\omega_0 \sin \phi. \quad (1.11)$$

Цей вітер спрямований перпендикулярно градієнту тиску, причому більш низький тиск знаходиться ліворуч (у північній півкулі).

Геострофічний вітер змінюється з висотою в залежності від температури. Замінивши в рівняннях (1.11) і співвідношенні $\partial P / \partial z = -\rho g$ щільність ρ на $P/R_1 T$, де R_1 – газова стала повітря і,

приймаючи допущення про лінійну зміну температури з висотою $T(x, y, z) = T_0(x, y) - \gamma(z - z_0)$, одержимо

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u}{T} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{-R_1}{l} \frac{\partial \ln P}{\partial y} \right) = -\frac{g}{lT^2} \frac{\partial T}{\partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{T} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{-R_1}{l} \frac{\partial \ln P}{\partial x} \right) = -\frac{g}{lT^2} \frac{\partial T}{\partial x},$$

$$\frac{g}{T} = -R_1 \frac{d \ln P}{dz}, \quad \int_{z_0}^z \frac{dz}{T^2} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T_0} \right) = \frac{z - z_0}{T_0 T}.$$

Остаточно

$$\begin{aligned} u_g &= \frac{T}{T_0} u_0 - \frac{g}{lT_0} (z - z_0) \frac{\partial T_0}{\partial y}, \\ v_g &= \frac{T}{T_0} v_0 + \frac{g}{lT_0} (z - z_0) \frac{\partial T_0}{\partial x}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

де $u_0 = u_g(x, y, z_0)$, $v_0 = v_g(x, y, z_0)$. Другі доданки в рівняннях (1.12) – складові термічного вітру. Вони спрямовані за нормаллю до горизонтального градієнта температури (рис. 1.4). Термічний вітер залишає область холоду ліворуч, тому в північній півкулі лівий поворот вітру передвіщує похолодання.

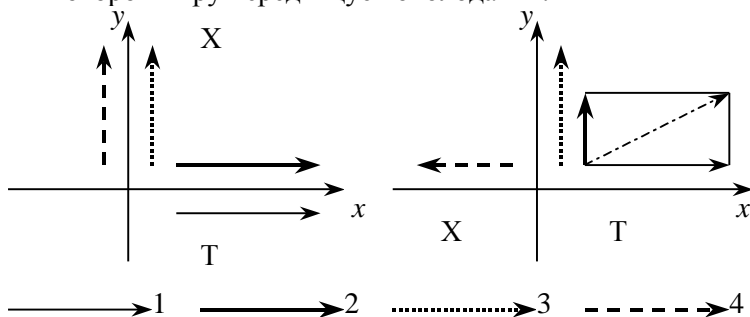


Рис. 1.4. Геострофічний та термічний вітер при різному розташуванні областей холоду (X) і тепла (T):

- 1) геострофічний вітер на ніжньому рівні z_0 ;
- 2) термічний вітер на рівні z ; 3) градієнт тиску; 4) градієнт температури

Дія сил тертя виявляється в гальмуванні руху повітря. Виділимо над висотою z шар повітря товщиною dz . Швидкість, спрямована вздовж осі Ox на висоті z_0 , дорівнює u , на висоті z_0+dz – відповідно $u+du$. Дотичні напруження, прикладені в протилежні сторони до нижньої і верхньої границь шару, дорівнюють

$$\tau_{zx}^h = -\left(\mu \frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=z_0}, \quad \tau_{zx}^e = \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=z_0} + \left(\frac{\partial}{\partial z} \mu \frac{\partial u}{\partial z}\right) dz, \quad (1.13)$$

де μ – коефіцієнт динамічної в'язкості повітря (при $T=0$ °C $\mu \approx 1.717 \cdot 10^{-5}$ Н·с/м²).

Складова сили тертя, прикладеної до одиниці маси шару, яка спрямована вздовж осі Ox , дорівнює

$$f_x = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial z} \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right).$$

Якщо u , v , w змінюються в просторі і $\mu = \text{const}$, то для всіх компонентів сили тертя можна записати

$$f_x = \frac{\mu}{\rho} \Delta u, \quad f_y = \frac{\mu}{\rho} \Delta v, \quad f_z = \frac{\mu}{\rho} \Delta w, \quad (1.14)$$

де Δ – оператор Лапласа. Чим менше масштаб руху, тим більше другі похідні, і, отже, більша роль сил тертя.

1.4. РІВНЯННЯ РУХУ. ТУРБУЛЕНТНІСТЬ

Поєднуючи (1.9) – (1.14), перейдемо до системи рівнянь руху атмосфери:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + lv + \frac{\mu}{\rho} \Delta u, \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - lu - 2\omega_0 w \cos\phi + \frac{\mu}{\rho} \Delta v, \\ \frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g + 2\omega_0 v \cos\phi + \frac{\mu}{\rho} \Delta w. \end{cases} \quad (1.15)$$

Для доповнення математичної моделі руху повітряних мас до системи (1.15) необхідно додати рівняння нерозривності

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0, \quad (1.16)$$

рівняння стану газу

$$P = \frac{\rho R T}{M}, \quad (1.17)$$

де M – молекулярна вага повітря; $R \approx 8.31$ Дж/(К·моль) – універсальна газова стала; а також рівняння адиабати

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{P}{P_0} \right)^{(c_p - c_v)/c_p}, \quad (1.18)$$

якщо процес адиабатичний, чи, при наявності припливу тепла Q_T , рівняння

$$\frac{dT}{dt} = \frac{c_p - c_v}{c_p} \cdot \frac{T}{p} \frac{dP}{dt} + \frac{1}{c_p} \frac{dQ_T}{dt}. \quad (1.19)$$

Тут c_v – теплоємність повітря при постійному об'ємі, $c_v = 718$ Дж/(кг·К).

Для опису локальних течій повітряних мас можна не враховувати силу Кориоліса, яка значно менше сил тертя. Однак цю силу слід враховувати при моделюванні великомасштабних процесів (наприклад, циклонів), коли можна знехтувати в'язкістю, крім приземного шару атмосфери.

При русі повітряних мас практично завжди існують випадкові пульсації швидкості великих і малих масштабів у часі й у просторі. Такий стан неупорядкованого руху називається турбулентністю. Для його опису представимо значення швидкості у вигляді суми його середніх значень і пульсацій:

$$u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v', \quad w = \bar{w} + w', \quad (1.20)$$

$$\bar{u} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} u dt, \quad \bar{v} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} v dt, \quad \bar{w} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} w dt, \quad (1.21)$$

де Δt – тривалість проміжку осереднення.

Перше з рівнянь системи (1.15) помножимо на ρ і складемо його з рівнянням (1.16), помноженим на u

$$u \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho l v + \mu \Delta u. \quad (1.22)$$

Це рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u w)}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho l v + \mu \Delta u. \quad (1.23)$$

Підставимо в (1.23) вирази для u , v і w з (1.20), зневажаючи при цьому пульсаціями густини ($\rho'=0$).

Осереднивши рівняння (1.23) на проміжку часу T відповідно до правил (1.21), і, використовуючи співвідношення для компонентів швидкості

$$\overline{u^2} = \bar{u}^2 + \overline{u'u'}, \quad \overline{uv} = \bar{u}\bar{v} + \overline{u'v'}, \quad \overline{uw} = \bar{u}\bar{w} + \overline{u'w'}, \quad (1.24)$$

одержимо

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}\bar{w}}{\partial z} &= \frac{1}{\rho} \left\{ \left[\mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} (\overline{\rho u'u'}) \right] + \right. \\ &+ \left. \left[\mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\rho u'v'}) \right] + \left[\mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{\rho u'w'}) \right] \right\} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + l\bar{v}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Вирази в квадратних дужках являють собою компоненти напруження, обумовленого молекулярною в'язкістю (перші доданки) і турбулентними пульсаціями (другі доданки). Щодо останніх, то відповідно до гіпотези Бусінеска передбачається, що справджуються такі залежності

$$-\frac{\partial}{\partial x} (\overline{\rho u'u'}) = \rho k \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}, \quad -\frac{\partial}{\partial y} (\overline{\rho u'v'}) = \rho k \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}, \quad -\frac{\partial}{\partial z} (\overline{\rho u'w'}) = \rho k \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2},$$

де k – коефіцієнт турбулентної в'язкості.

Звичайно в атмосфері $k=1..100 \text{ м}^2/\text{с}$, тому доданками, що відповідають молекулярній в'язкості, можна зневажати. Тоді

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + lv + k\Delta u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - lv - 2\omega_0 w \cos\phi + k\Delta v, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + 2\omega_0 v \cos\phi + k\Delta w. \end{cases} \quad (1.26)$$

У рівняннях руху (1.26) в остаточному вигляді риси зверху для простоти опущені. Турбулентний перенос є головним механізмом обміну кількістю руху, теплом і парою між землею й атмосферою.

1.5. ПОГРАНИЧНИЙ І ПРИЗЕМНИЙ ШАРИ АТМОСФЕРИ

Нижній шар атмосфери, де відбувається обмін кількістю руху, а також тепло- та масообмін між землею й атмосферою, називається пограничним шаром. У першому наближенні за нього можна розглядати шар Екмана, який визначається за таких умов. Нехай у рівняннях (1.26) u і v залежать тільки від z , $w=0$, рух сталий, вісь Oy спрямована паралельно градієнта тиску. Тоді

$$\begin{cases} l\bar{v} + k \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} = 0, \\ -l\bar{u} + k \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}, \end{cases} \quad (1.27)$$

причому $\bar{u} = \bar{v} = 0$ на поверхні Землі.

Помноживши друге рівняння на i , і склавши його з першим, одержимо

$$\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} - \frac{il}{k} s = \frac{i}{k\rho} \frac{\partial P}{\partial y}, \quad (s = \bar{u} + i\bar{v}).$$

Розв'язок останнього рівняння з урахуванням граничної умови має вигляд:

$$s = u_g - u_g e^{-\lambda z - i\lambda z}, \quad \lambda = -\sqrt{l/2k}, \quad (1.28)$$

звідкіля

$$\bar{u} = u_g (1 - e^{-\lambda z} \cos \lambda z), \quad \bar{v} = u_g e^{-\lambda z} \sin \lambda z. \quad (1.29)$$

З ростом z значення \bar{u} й \bar{v} описують на площині спіраль Екмана (рис. 1.5): біля земної поверхні вітер відхилений на 45° уліво від геострофічного вітру, з висотою він повертається вправо. Висота $z_{II} = \pi/\lambda$, де $\bar{v} = 0$, вважається потужністю шару Екмана. При $k = 15 \text{ м}^2/\text{с}$ на широті $\phi = 55^\circ$ вона складає близько 1,57 км.

Розбіжність між реальною товщиною пограничного шару і потужністю шару Екмана пов'язана з неврахуванням впливу температури і сталістю коефіцієнта турбулентної в'язкості k . Найбільша турбулентність характерна для нижньої частини шару, де значні градієнти швидкості $\partial u/\partial z$.

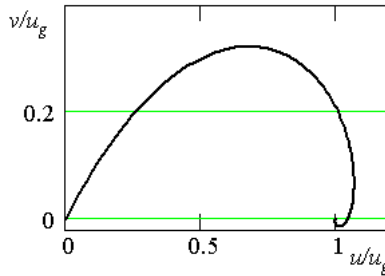


Рис. 1.5. Спіраль Екмана

Приземний шар атмосфери визначається як шар, в якому постійне дотичне напруження τ_{zx} і напрямок вітру не змінюється з висотою. Звичайно його товщина складає 50–100 м, в окремих випадках вона зменшується до 10 м.

Уведемо параметр L_m – середню довжину шляху змішування, що визначається як довжина шляхів, які пролітають окремі молекули повітря до змішування з навколишнім середовищем. Між величинами τ_{zx} (далі для простоти τ), ρ , L_m і $\partial \bar{u}/\partial z$ з погляду теорії розмірностей можливо тільки наступне співвідношення:

$$\tau = \rho L_m^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2. \quad (1.30)$$

У приземному шарі L_m зменшується з висотою через обмеження руху

$$L_m = \kappa z,$$

де κ – константа Кармана. Визначимо динамічну швидкість (швидкість тертя) як

$$u^* = \sqrt{\tau / \rho}.$$

Значення u^* складають 0.2–0.8 м/с. Для дотичного напруження τ можна записати $\tau = -\kappa \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \rho L_m^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2$, відкіля $k = L_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right|$.

Оскільки $\frac{\tau}{\rho} = L_m^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2$, то $\left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| = \frac{u^*}{L_m}$ і $k = u^* L_m = u^* \kappa z$. Тому

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{u^*}{\kappa z}.$$

Розв'язуючи це рівняння, одержимо відому формулу логарифмічного розподілу швидкості вітру з висотою

$$\bar{u} = \frac{u^*}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0} \quad \text{чи} \quad \bar{u} = u_1 \frac{\ln z / z_0}{\ln z_1 / z_0} \quad (1.31)$$

де z_0 – параметр шорсткості земної поверхні, м; u_1 – швидкість вітру на висоті z_1 (звичайно приймається $z_1=1$ м). Залежність (1.31) справедлива тільки при однорідному розподілі температури в приземному шарі. У загальному випадку масштаб L_m залежить від турбулентного потоку тепла, стратифікації атмосфери й інших факторів.

Урахування нерівномірного розподілу швидкості вітру в приземному шарі необхідне при моделюванні поширення домішок біля невеликих об'єктів, у тих випадках, де істотним є рельєф, неоднорідний характер поверхні. Для оцінок трансграничного переносу домішок на далекі відстані варто розглядати пог-

раничний шар атмосфери, оскільки висота поширення домішок у цьому випадку складає 1,5–2 км [1.4].

1.6. РІВНЯННЯ ТУРБУЛЕНТНОЇ ДИФУЗІЇ В АТМОСФЕРІ

Нехай u , v , w – компоненти швидкості часток повітря, $\varphi(x, y, z, t)$ – концентрація нейтральної домішки, що поширюється з потоком повітря в атмосфері. Рівняння переносу такої домішки вздовж траєкторії часток повітря записується у вигляді [1.5]

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0, \text{ чи } \frac{\partial\varphi}{\partial t} + u\frac{\partial\varphi}{\partial x} + v\frac{\partial\varphi}{\partial y} + w\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0. \quad (1.32)$$

Помноживши на φ рівняння нерозривності при $\rho = \text{const}$ і склавши його з (1.32), одержимо

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial u\varphi}{\partial x} + \frac{\partial v\varphi}{\partial y} + \frac{\partial w\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \text{div } \vec{V}\varphi = 0, \quad (1.33)$$

де \vec{V} – вектор швидкості часток повітря. Процес розпаду (нейтралізації) домішки враховується введенням доданка $\sigma\varphi$ у ліву частину (1.33), де $\sigma \geq 0$ – швидкість фізико-хімічної трансформації домішки, с^{-1} . Наявність джерел викиду домішки враховується членом $q(x, y, z, t)$, який треба додати до правої частини (1.33). Узагальнивши таким чином дане рівняння, будемо мати

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \text{div } \vec{V}\varphi + \sigma\varphi = q. \quad (1.34)$$

У рівняннях (1.32)–(1.34) функції u , v і w є миттєвими швидкостями, значення яких постійно змінюються відповідно до турбулентних пульсацій в атмосфері внаслідок дії вихорів різного масштабу. Тому математичний опис переносу домішки в атмосфері можливий лише з використанням величин, осереднених протягом деякого проміжку часу. Представимо концентрацію, як і швидкість вітру, у вигляді суми осередненого значення і малих пульсаційних складових

$$\varphi = \bar{\varphi} + \varphi', \quad (1.35)$$

причому для інтервалу $[t, t+\Delta t]$ мають місце співвідношення:

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \varphi dt, \quad \bar{\varphi}' = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \varphi' dt = 0.$$

Інтегруючи рівняння (1.34) на проміжку $[t, t+\Delta t]$, одержимо

$$\frac{\bar{\varphi}(t+\Delta t) - \bar{\varphi}(t)}{\Delta t} + \operatorname{div} \bar{\bar{V}} \bar{\varphi} + \operatorname{div} \bar{\bar{V}}' \varphi' + \sigma \bar{\varphi} - \bar{q} = - \frac{\varphi'(t+\Delta t) - \varphi'(t)}{\Delta t}.$$

Оскільки осереднені величини набагато перевищують їхні флуктуації ($\bar{\varphi} \gg \varphi'$), то доданки в правій частині можна відкинути через їхню малість. Вважаючи, що на проміжку $[t, t+\Delta t]$ концентрація змінюється мало, можна замінити різницеве відношення в лівій частині на похідну за часом. У результаті приходимо до рівняння відносно осередненої концентрації

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} + \operatorname{div} \bar{\bar{V}} \bar{\varphi} + \operatorname{div} \bar{\bar{V}}' \varphi' + \sigma \bar{\varphi} - \bar{q} = 0, \quad (1.36)$$

яке відрізняється від рівняння (1.34) флуктуаційним моментом $\operatorname{div}(\bar{\bar{V}}' \varphi')$. Цей доданок відповідає за розсіювання (дисперсію) часток домішки в потоці повітряних мас.

Для атмосферних процесів можливо наступне напівемпіричне представлення компонентів вектора $\bar{\bar{V}}' \varphi'$:

$$\bar{u}' \varphi' = -D_x \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}, \quad \bar{v}' \varphi' = -D_y \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y}, \quad \bar{w}' \varphi' = -D_z \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z}. \quad (1.37)$$

Підставивши (1.37) у (1.36), одержимо рівняння переносу і дифузії домішок в атмосфері

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z} \right) - \\ - \operatorname{div} \bar{\bar{V}} \bar{\varphi} - \sigma \bar{\varphi} + \bar{q} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Тут $D_x \geq 0$, $D_y \geq 0$ – горизонтальні, $D_z \geq 0$ – вертикальний коефіцієнт дифузії, які визначаються експериментально.

Розподіл концентрації домішки в початковий момент часу в області Ω задається умовою

$$\varphi(x, y, z, 0) = \varphi_0(x, y, z). \quad (1.39)$$

Граничні умови повинні задаватися так, щоби розв'язок крайової задачі був би єдиним. Згідно [1.5] цій вимозі задовольняють наступні умови:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_s \quad \text{на } \Gamma \text{ при } V_n < 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= 0 \quad \text{на } \Gamma \text{ при } V_n \geq 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \alpha \varphi \quad \text{при } z = z_n, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0 \quad \text{при } z = H. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Тут Γ – бічна межа області поширення домішки (рис. 1.6), S_H – верхня межа розповсюдження домішок (H – товщина шару їхнього поширення); S_0 – земна поверхня; $\alpha = \lambda / D_z$, λ – швидкість поглинання домішки на цій поверхні, м/с [1.4]; V_n – нормальна складова швидкості вітру на межі Γ ; n – вектор одиничної нормалі до межі Γ .

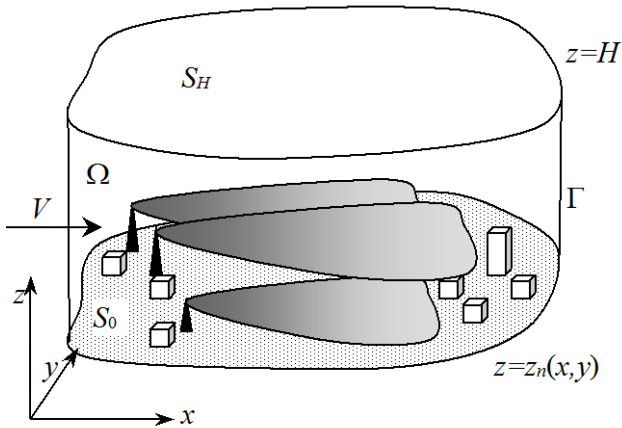


Рис. 1.6. Область розповсюдження домішки в атмосфері (до постановки задачі (1.38)–(1.40))

Для багатьох задач можна взяти $H=\infty$. У випадку необмеженої в плані області переносу (відсутності межі Γ) можна прийняти $\partial\varphi/\partial x=\partial\varphi/\partial y=0$ при $x^2+y^2\rightarrow\infty$.

Якщо розглядається перенос вагової домішки (часток пилу), необхідно враховувати швидкість гравітаційного осідання w_s , м/с. Тоді рівняння (1.38) прийме вид (риски в ньому опущені)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(D_x \frac{\partial\varphi}{\partial x} - u\varphi\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_y \frac{\partial\varphi}{\partial y} - v\varphi\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z}\left(D_z \frac{\partial\varphi}{\partial z} - (w - w_s)\varphi\right) - \sigma\varphi + q = \frac{\partial\varphi}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

У випадку складних фізико-хімічних перетворень (наприклад, для умов фотохімічного смогу) слід розглядати систему рівнянь виду (1.41), кожне з яких описує перенос однієї з речовин суміші. Конкретний вигляд функції q визначається кінетикою хімічних реакцій за участю всіх речовин [1.25].

1.7. ПАРАМЕТРИ РІВНЯННЯ ТУРБУЛЕНТНОЇ ДИФУЗІЇ

Швидкість вітру. При відсутності сильно виражених нерівностей рельєфу вітер можна вважати односпрямованим. В умовах нейтральної стратифікації в приземному шарі повітря ($\gamma_0=\gamma$, розділ 1.1) розподіл швидкості з висотою може бути приблизно описаний логарифмічною залежністю виду

$$u = \begin{cases} u_1 \frac{\ln(z/z_0)}{\ln(z_1/z_0)}, & z < h, \\ u_1 \frac{\ln(h/z_0)}{\ln(z_1/z_0)} = \text{const}, & z \geq h. \end{cases} \quad (1.42)$$

де h – висота приземного шару повітря.

Доволі часто, наприклад, при аномальному розподілі температури з висотою, залежність (1.42) порушується. У ряді математичних моделей використовується степенева залежність виду $u=u_1(z/z_1)^p$ при $p=0.15\div 0.5$ [1.2, 1.3, 1.9].

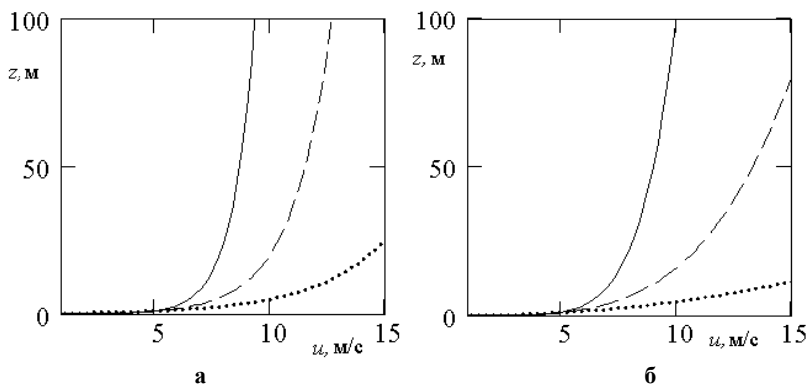


Рис. 1.7. Зміна швидкості вітру з висотою:

а) логарифмічна залежність (1.42): $z_0=0.005$ м (—), $z_0=0.05$ м (---), $z_0=0.2$ м (⋯); б) степенева залежність: $p=0.15$ (—), $p=0.25$ (---), $p=0.45$ (⋯)

Таблиця 1.1

Характерні значення параметра шорсткості [1.15]

Тип поверхні	z_0 , см
Сніг, газон з травою висотою до 1 см	0.1
Луг з травою висотою до 15 см	0.2 ÷ 0.6
Висока трава до 60 см	4 ÷ 9
Неоднорідна поверхня з кущами та ділянками трави	10 ÷ 20
Парк, ліс висотою до 10 м	20 ÷ 100
Міські будівлі	100

Коефіцієнти дифузії. У приземному шарі ($z \leq h$) коефіцієнти дифузії можуть визначатися за такими формулами [1.2]:

$$D_x = D_0 + k_0 u(z), \quad D_y = D_x, \quad D_z = D_0 + D_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^m, \quad (1.43)$$

де $k_0=0,1 \dots 1$ м; $m=0.8-1.2$ в залежності від сталості атмосфери; D_0 – коефіцієнт молекулярної дифузії; D_1 – коефіцієнт турбулентної дифузії на висоті $z=z_1$, що звичайно складає $0,1-0,2$ м²/с. Вище приземного шару ($z > h$) можна прийняти

$$D_x \approx D_y \approx D_z, \quad D_z = D_0 + D_1 \left(\frac{h}{z_1} \right). \quad (1.44)$$

Коефіцієнтом молекулярної дифузії внаслідок його малості можна зневажати. При визначенні коефіцієнтів дифузії компоненти швидкості u , v і w вважаються заданими (за даними метеорологічних спостережень) або обчисленими (за рішенням гідродинамічної задачі обтікання земної поверхні). При вирішенні задачі спільного переносу руху і тепла в приземному шарі параметр D_1 визначається з урахуванням залежності від температури.

Швидкість осадження домішок. Швидкість осадження вагової домішки може бути обчислена за формулою Стокса з поправками Озеена [1.2]

$$w_s = 1.3 \cdot 10^{-2} \rho_n r_n^2, \quad (1.45)$$

де ρ_n – щільність часток пилу; r_n – їхній радіус. Для значень $r_n=10, 50, 100$ мкм швидкість осідання складає 1.3, 30, 130 см/с. Розподіл часток за розмірами залежить від ступеня очищення пилу на фільтрах. При високому ступені очищення (вище 90%) і $\rho_n=1\dots2,5$ г/см³ переважають легкі частинки з $w_s < 5$ см/с (40–50% усіх частинок), частинок зі швидкістю осідання від 5 до 25 см/с – 30–40%, інші частинки мають $w_s > 5$ см/с. При розрахунках можна припускати, що перенос кожної фракції пилових частинок відбувається незалежно одна від одної.

Нейтралізація (розпад) домішок. Швидкість убування домішок в атмосфері характеризується параметром нейтралізації σ (с⁻¹), що визначається швидкістю реакцій розпаду і фізико-хімічних трансформацій σ_1 і інтенсивністю вимивання домішки опадами σ_2 (див. розділ 1.2). При постійній швидкості розпаду $\sigma_1 = \ln 2/T_{0,5}$, де $T_{0,5}$ – період піврозпаду домішки, с. Типові значення $T_{0,5}$ для більшості домішок складають від 10^2 до 10^6 с. Швидкість реакцій може значно змінюватися при зміні метеорологічних умов, освітленості тощо.

При масових викидах вихлопних газів, що містять оксиди сірки, азоту, вуглецю, інші домішки виникає фотохімічний смог – забруднення атмосфери продуктами реакцій первинних забруднювачів. Утворення смогу відбувається в результаті складного ланцюжка фотохімічних реакцій у присутності світла [1.4, 1.25]. Механізми таких реакцій звичайно описуються рів-

няннями хімічної кінетики першого і другого порядків, а швидкості реакцій – сталими чи змінними величинами.

У двовимірних моделях переносу до параметра σ додається швидкість убування домішки в приземному шарі за рахунок сухого (гравітаційного) осідання σ_3 . Параметр σ_3 можна оцінити як w_s/H , де H – висота шару поширення домішок. Значення w_s для газів і аерозолів, дрібних часток знаходяться, як правило, в межах 0,6–1,0 см/с.

Параметри, що характеризують інтенсивність викидів. Для точкових джерел, які схематизують труби промислових та енергетичних підприємств, задається об'ємна або масова витрата домішок q , м³/с або кг/с. Для потужних підприємств сумарний масовий викид домішок може досягати 0.2–0.3 кг/с. Для лінійних джерел, наприклад, автомагістралей, задається масовий викид q_l на одиницю довжини, кг/(м·с). Значення q_l обчислюються з урахуванням інтенсивності, швидкості руху, складу транспорту, а також питомого викиду домішок від автотранспорту (табл. 1.2).

Таблиця 1.2

**Середні питомі викиди автотранспорту
(за умов середньої швидкості 31.7 км/годину) [1.14]**

Види забруднень	г/годину	г/км
Оксид вуглецю CO	752	23.7
Неспалені вуглеводи C _n H _m	29.4	0.93
Оксиди азоту N _x O _y	33.2	1.05
Свинець	1.11	0.035
Сума вихлопних газів	28.95 м ³ /годину	0.914 м ³ /км
Середня витрата палива	2.75 кг/годину	0.087 кг/км

Швидкість поглинання домішок на земній поверхні λ , що входить до граничної умови (1.40), для більшості домішок складає, як правило, 0,1–0,8 см/с [1.4]. У деяких випадках (мокра висока поверхня з рослинністю) λ може короткочасно зростати до 0,2 м/с. Але в звичайних умовах домішки слабо взаємодіють з поверхнею землі.

1.8. ДВОВИМІРНЕ НАБЛИЖЕННЯ РІВНЯННЯ ТУРБУЛЕНТНОЇ ДИФУЗІЇ

При вирішенні задач далекого переносу домішок (у регіональному масштабі) доцільно перейти до двовимірної горизонтальної моделі. Будемо вважати, що горизонтальні компоненти швидкості вітру u і v не змінюються з висотою, тобто $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$. Шуканою величиною стане концентрація, осереднена за висотою H шару поширення домішки

$$\bar{\varphi}(x, y, t) = \frac{1}{H} \int_0^H \varphi(x, y, z, t) dz. \quad (1.46)$$

Нехай вихідна задача переносу і дифузії розглядається в тривимірній постановці [1.5]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \bar{V} \varphi + \sigma \varphi = D \Delta \varphi + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + q, \quad (1.47)$$

$$\varphi|_{t=0} = \varphi_0; \quad \varphi = \varphi_\Sigma \text{ при } (x, y) \in \Sigma, \quad (1.48)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \alpha \varphi \text{ при } z=0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \text{ при } z=H. \quad (1.49)$$

Тут вважається, що $D_x = D_y = D = \text{const}$. Проінтегруємо рівняння (1.47) за координатою z від 0 до H :

$$\int_0^H \frac{\partial \varphi}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^H \varphi dz; \quad \int_0^H D \Delta \varphi dz = D \Delta \int_0^H \varphi dz,$$

$$\int_0^H \operatorname{div} \bar{V} \varphi dz = \frac{\partial}{\partial x} \left(u \int_0^H \varphi dz \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \int_0^H \varphi dz \right) + w \varphi|_{z=0}^{z=H}.$$

Оскільки вертикальна компонента швидкості $w=0$ при $z=0$ і $z=H$, то останній доданок дорівнює нулю.

$$\int_0^H \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dz = D_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0}^{z=H} = -D_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0}.$$

Прийmemo, що приблизно має місце

$$\varphi|_{z=0} = \frac{1}{H} \int_0^H \varphi dz.$$

Тоді

$$\int_0^H \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dz = -\alpha D_z \int_0^H \varphi(x, y, z, t) dz = -\alpha D_z \bar{\varphi}(x, y, t).$$

Розділивши всі доданки на H , прийдемо до рівняння

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial u \bar{\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial v \bar{\varphi}}{\partial y} + \bar{\sigma} \bar{\varphi} = D \Delta \bar{\varphi} + \bar{q} \quad (1.50)$$

за умов (1.48). Тут $\bar{q} = \frac{1}{H} \int_0^H q(x, y, z, t) dz$, $\bar{\sigma} = \sigma + \alpha D_z / H$. Таким

чином, коефіцієнт нейтралізації в двовимірній моделі враховує також убування домішки за рахунок її поглинання на поверхні землі.

Розглянемо найпростішу розрахункову схему двовимірного поширення домішки: стаціонарне розсіювання від точкового джерела інтенсивністю q , розташованого в точці з координатами (x_0, y_0) . Коефіцієнт дифузії і компоненти швидкості приймемо постійними. Такий процес описується рівнянням виду (1.50), в якому для простоти ризику відкинути

$$D \Delta \varphi - u \frac{\partial \varphi}{\partial x} - v \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \sigma \varphi = -q \delta(x - x_0, y - y_0) \quad (1.51)$$

за умов

$$\varphi \rightarrow 0, \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty. \quad (1.52)$$

За допомогою підстановки

$$\varphi(x, y) = S(x, y) \exp\left(\frac{ux + vy}{2D}\right)$$

перейдемо до рівняння без конвективних членів

$$D \Delta S - \left(\frac{u^2 + v^2}{4D} + \sigma \right) S = -q \exp\left(-\frac{ux + vy}{2D}\right) \delta(x - x_0, y - y_0).$$

Це рівняння можна записати в циліндричних координатах

$$\frac{d^2 S}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dS}{dr} - \lambda^2 S = -\frac{q}{D} \exp\left(-\frac{ur \cos \theta + vr \sin \theta}{2D}\right) \delta(r-r_0), \quad (1.53)$$

де $\lambda = \sqrt{\frac{u^2 + v^2 + 4\sigma D}{4D^2}}$, $|r-r_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$.

Розв'язок рівняння (1.53) записується у вигляді:

$$S(r) = \frac{q}{2\pi D} \exp\left(-\frac{ux_0 + vy_0}{2D}\right) K_0(\lambda|r-r_0|),$$

де $K_0(\xi)$ – функція Макдональда нульового індексу.

Тоді розв'язком рівняння (1.51) буде [1.5]

$$\varphi(x, y) = \frac{q}{2\pi D} \exp\left(\frac{u(x-x_0) + v(y-y_0)}{2D}\right) K_0(\lambda|r-r_0|). \quad (1.54)$$

Типові розподіли концентрації домішки, розраховані за формулою (1.54), представлені на рис. 1.8.

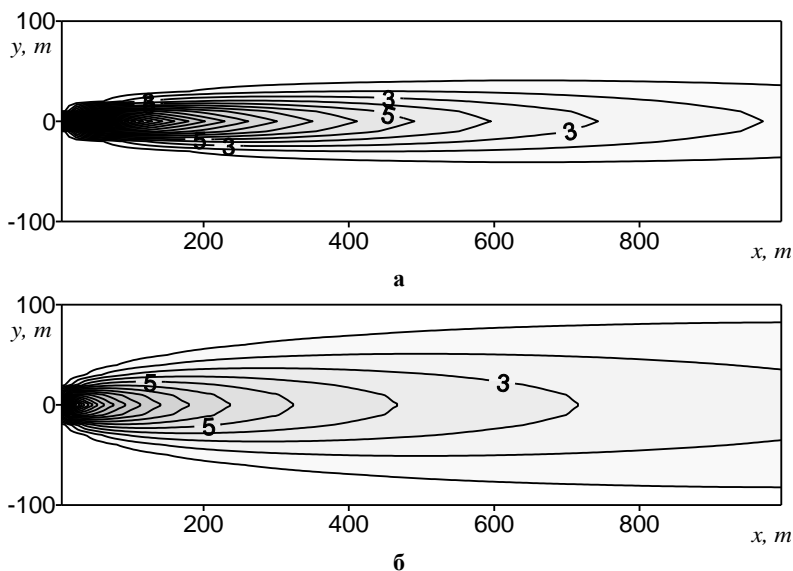


Рис. 1.8. Розподіл концентрації домішок у повітрі при стаціонарній дифузії ($u=1$ м/с, $v=0$): а) $D=0.5$ м²/с; б) $D=2$ м²/с

Джерело викиду знаходиться на початку координат. При збільшенні параметра дифузії зростає ширина зони поширення домішки та зменшується її концентрація.

Функція $K_0(\xi)$ має логарифмічну особливість на початку координат: $K_0(\xi) \sim -\ln \xi$ при $\xi \rightarrow 0$. Це може призводити до фізично необґрунтованих завищених значень φ в околі r_0 , тому ця точка повинна бути виключена при розрахунках. При великих значеннях аргументу $K_0(\xi) \sim \sqrt{\pi/2\xi} e^{-\xi}$, тому найменша швидкість убавання концентрації, пропорційна $\xi^{-1/2}$, має місце на осі, що проходить через джерело вздовж напрямку вітру.

1.9. ПЕРЕНОС І ДИФУЗІЯ ДОМІШКИ В УМОВАХ ЗМІННОГО ВІТРУ

У структурі вітрових течій, що визначають перенос і дифузю домішки у приземному шарі, можна виділити мезомасштабні і мікромасштабні флуктуації вітру [1.5]. Мезомасштабні флуктуації характеризують зміну руху повітряних мас, що відбуваються через кілька годин – кілька діб, протягом яких сам рух можна вважати постійним. При такому «постійному» русі мають місце мікромасштабні флуктуації, характерний час яких складає від декількох секунд до декількох хвилин.

Розрахунок переносу домішок в умовах перебування руху повітряних мас упродовж досить тривалого проміжку часу можна виконати на основі принципу зміни стаціонарних станів [1.5]. Відповідно до нього передбачається, що на протязі періоду T у даній місцевості реалізується n типів стаціонарного руху тривалістю Δt_i , причому $\sum_{i=1}^n \Delta t_i = T$. Поширення домішки при i -му типі руху описується рівнянням

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(D_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} - u_i \varphi_i \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} - v_i \varphi_i \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_{z_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} - (w_i - w_s) \varphi_i \right) - \sigma_i \varphi_i = -q_i, \end{aligned} \quad (1.55)$$

яке відповідає проміжку часу $[t_i, t_{i+1}]$. Нехай усі n рівнянь розв'язані. Тоді середньо-ймовірна концентрація домішки визначається за формулою

$$\bar{\varphi}(x, y, z) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n \varphi_i(x, y, z) \Delta t_i, \quad (1.56)$$

яка називається також статистичною моделлю. При її побудові передбачалося, що перебудова руху повітряних мас відбувається миттєво. У [1.5] поряд з викладеною моделлю розглянуті також більш складні моделі, що враховують час перебудови руху. Вони побудовані на розв'язках нестационарних періодичних задач переносу і дифузії.

При наявності даних про частоту повторюваності напрямків вітру ω_i по 8 румбам тривалість періодів Δt_i визначається як $\omega_i T$, де $T=365$ діб. Однак розрахунок за формулою (1.56) дає фізично необгрунтовану картину з переважаючим переносом уздовж 8 головних напрямків. Тому більш адекватним характеру процесу буде такий розподіл напрямку вітру, щільність якого $\omega(\theta)$ будувється згідно з припущенням, що напрямок вітру безперервно змінюється при переході від одного румба до іншого

$$\omega(\theta) = \frac{4}{\pi} \left(\omega_i + \frac{\omega_{i+1} - \omega_i}{\pi/4} (\theta - \theta_i) \right), \quad \frac{\pi i}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi(i+1)}{4}.$$

причому $\omega_i \geq 0$, $i = 0, \dots, 7$; $\sum_{i=0}^7 \omega_i = 1$, тому $\int_0^{2\pi} \omega(\theta) d\theta = 1$.

Нехай $\varphi(x, y, z)$ – стаціонарний розподіл концентрацій домішки при постійній швидкості вітру, сполученою з віссю Ox . У загальному випадку швидкість вітру може складати кут θ з позитивним напрямком осі Ox . Тоді $\varphi'(\xi(x, y, \theta), \eta(x, y, \theta), z)$ являє собою розподіл концентрації при зазначеній орієнтації швидкості. Тут

$$\begin{cases} \xi = x \cos \theta + y \sin \theta, \\ \eta = -x \sin \theta + y \cos \theta, \end{cases} \quad (1.57)$$

перетворення координат з поворотом осей. Замість формули (1.56) можна записати:

$$\bar{\varphi}(x, y, z) = \int_0^{v_{max}} \int_0^{2\pi} \varphi'(\xi(x, y, \theta), \eta(x, y, \theta), z) \omega(\theta) f(v, \theta) dv d\theta, \quad (1.58)$$

врахувавши в ній також розподіл частоти повторюваності вітрів різної швидкості від 0 до v_{max} . На рис. 1.9 наведені приклади параметрів вітрового режиму, а на рис. 1.10 – відповідний розподіл середньо-ймовірної концентрації домішки, розрахований за формулою (1.58) на основі тривимірної моделі (лабораторна робота №2).

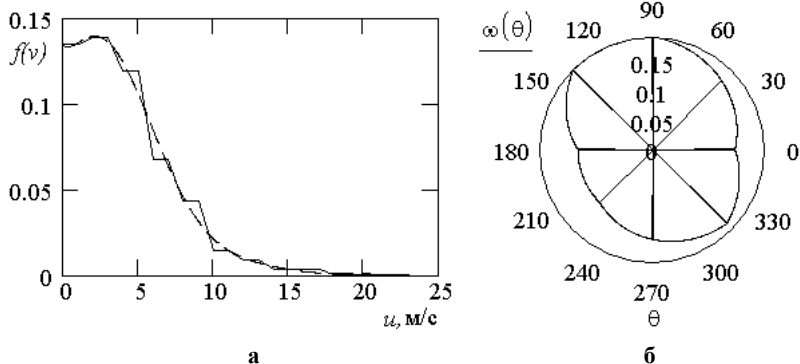


Рис. 1.9. Параметри вітрового режиму, використані в моделі:

а) повторюваність швидкостей вітру (— експеримент, --- апроксимация); б) троянда вітрів

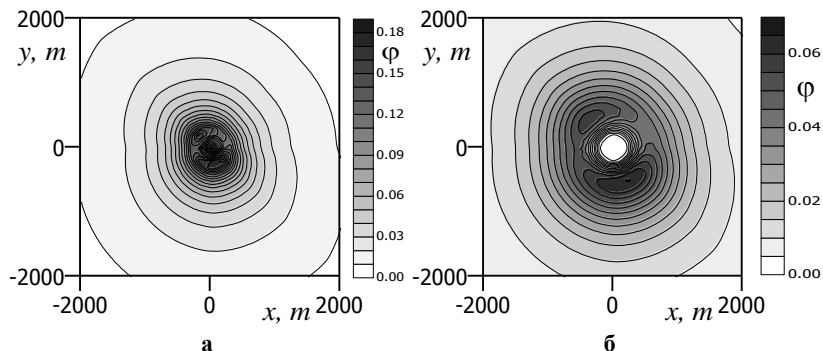


Рис. 1.10. Розподіл середньомірної концентрації φ (мг/м³) на рівні землі при різній висоті джерела викиду: а) 20 м, б) 50 м

Аналізуючи графіки, можна виділити зони максимуму концентрації домішки, пов'язані з переважаючими напрямками вітру, а також збільшення «чистої» зони безпосередньо навколо джерела викиду та зменшення приземної концентрації при зростанні його висоти.

Аналогічний підхід може бути застосований при моделюванні дифузії домішки з урахуванням дрібномасштабних флуктуацій вітру. Нехай τ' – характерний час дії дрібномасштабних вихорів, що складає за даними [1.2] 2–3 хв. Відповідно до результатів експериментів, імовірність відхилення середніх за проміжок τ' напрямків вітру на кут θ від середнього за період T' напрямку вітру приблизно описується законом Гауса

$$f(\theta) = \frac{1}{\theta_0 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\theta^2}{2\theta_0^2}\right),$$

де θ_0 – дисперсія напрямків вітру за період T' . Визначена за період T' концентрація виражається формулою

$$\bar{\varphi}(x, y, z) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varphi(\xi(x, y, \theta), \eta(x, y, \theta), z) f(\theta) d\theta. \quad (1.59)$$

Тривалість періоду T' (інтервалу осереднення концентрацій) повинна бути не менше часу відбору проб і часу переносу (x/u) до даної точки розрахункової області. Параметр θ_0 можна визначити як середньоквадратичне відхилення вимірюваних напрямків швидкості θ_i за проміжок T' від середнього значення. Згідно [1.2], θ_0 складає звичайно 5–10° і залежить від швидкості вітру і стійкості атмосфери.

1.10. ДИФУЗИЯ ДОМІШКИ ВІД ТОЧКОВОГО ДЖЕРЕЛА

Розглянемо постійно діюче джерело (трубу), що викидає домішку на висоті h . Припускаємо, що об'єм газів, які викидаються, незначний у порівнянні з об'ємною витратою обтікаючого повітряного потоку, процес дифузії стаціонарний.

Найпростіша схема поширення димішки при постійному вітрі показана на рис. 1.11 [1.7]. У результаті конвекції за напрямком вітру утворюється шлейф димішки, який поширюється у вигляді конуса з основою діаметром b та кутом α між утворюючою і висотою. На деякій віддаленні від джерела l_1 (у першому наближенні $l_1 = h / \sin \alpha$) конус стикається з поверхнею землі. При $x > l_1$ приземна концентрація зростає і досягає максимуму в деякій точці l_{max} , після чого повільно спадає внаслідок дифузії димішки, її поглинання на поверхні і розпаду (нейтралізації).

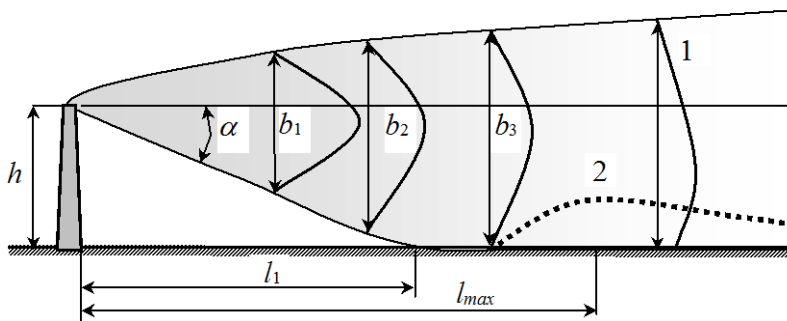


Рис. 1.11. Схема точкового джерела димішки в атмосфері:

- 1) профіль концентрації уздовж вертикалі;
- 2) профіль приземної концентрації димішки

На підставі спостережень виділені наступні типи димових струменів (рис. 1.12) [1.2, 1.7]:

1. Хвилеподібний, що утворюється при сильному вітрі за рахунок великомасштабних вихорів, які перевершують ширину струменя;

2. Конусоподібний, що утворюється за рахунок дрібно-масштабних вихорів; зона змішування постійно розширюється.

3. Віялоподібний, що утворюється при температурній інверсії, причому розсіювання по горизонталі набагато інтенсивніше, ніж по вертикалі.

4. Висхідний, розсіювання в якому відбувається нагору, оскільки джерело знаходиться вище інверсійного шару.

5. Спадний, розсіювання в якому відбувається донизу, оскільки джерело знаходиться нижче інверсійного шару. Спадний

струмінь найбільш небезпечний, оскільки приводить до сильної загазованості приземного шару повітря.

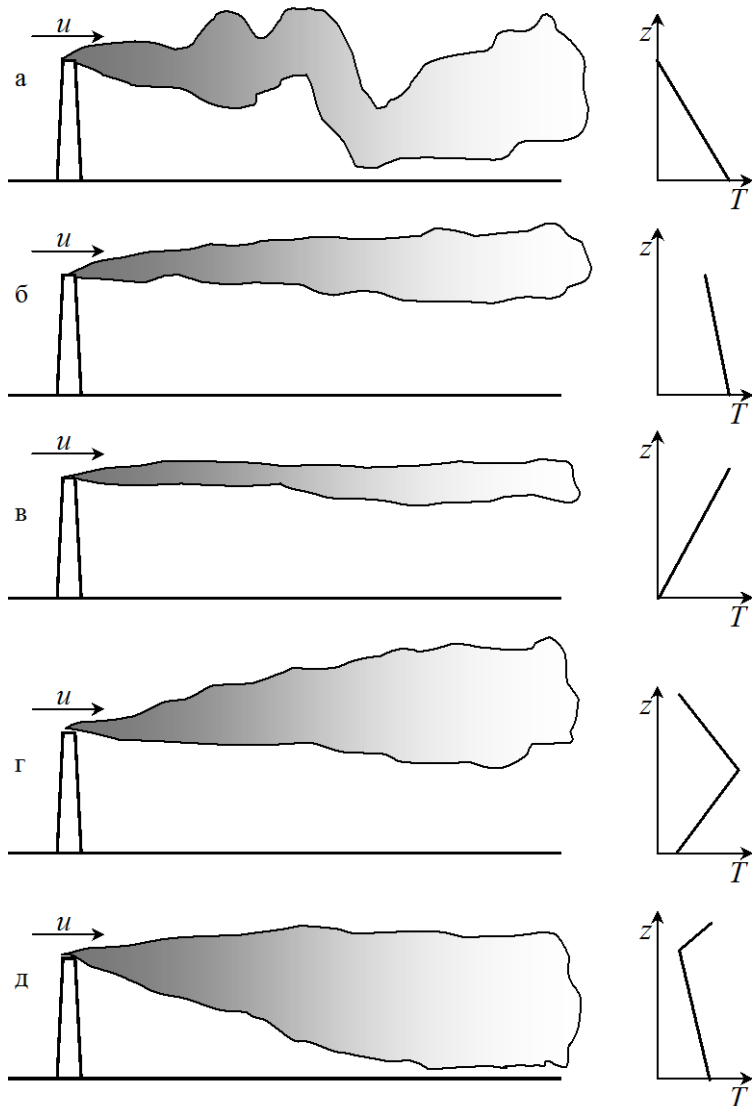


Рис. 1.12. Типи димових струменів: а) хвилеподібний, б) конусоподібний, в) віялоподібний, г) висхідний, д) спадний

Для кожного типу струменя наведено характерний профіль зміни температури повітря з висотою.

Форма димових струменів залежить від стійкості атмосфери, яка кількісно характеризує стан приземного шару повітря. Згідно Паскуїлу [1.2; 1.15] виділяється 6 класів стійкості (табл. 1.3). Найменша стійкість характерна для денного часу при сонячній погоді, найбільша – уночі при слабкому вітрі. При сильному вітрі в будь-який час доби стійкість близька до рівноважного стану.

Таблиця 1.3

Класи стійкості атмосфери [1.15]

<i>u</i> м/с	День			День, ніч $n_1=8-10$	Ніч	
	$R_d > 50$	$12.5 < R_d < 50$	$R_d < 12.5$		$n_2=5-10,$ $n_1=5-7$	$n_3 \leq 4$
<2	A	B	D	D	–	–
2-3	A-B	B	D	D	E	F
3-4	B	C	D	D	D	E
4-6	C	C	D	D	D	D
>6	C	D	D	D	D	D

A, B, C – сильна, помірна і слабка нестійкість; D – рівноважний стан;
E–F – слабка і помірна стійкість; n_1 – параметр нижньої хмарності (за десятибальною шкалою); n_2 – параметр верхньої хмарності;
 n_3 – параметр загальної хмарності; R_d – сонячна радіація (ланглей/годину)

Розсіювання домішки від точкового джерела може бути описане за допомогою формули Сеттона [1.2]

$$\varphi(x, y) = \frac{q}{\pi \sigma_y \sigma_z u} \exp\left(-\frac{h^2}{2\sigma_z^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right), \quad (1.60)$$

яка описує розподіл приземної концентрації домішки. Параметри розсіювання σ_y та σ_z часто задаються у вигляді $\sigma_y^2 = 2D_y x$, $\sigma_z^2 = 2D_z x$. Тоді вираз (1.60) може розглядатися як розв’язок рівняння стаціонарної дифузії, в якому відкинута член, що відповідає дифузії в подовжньому напрямку. Парамет-

ри розсіювання для відкритої місцевості і відстаней від 100 до 10000 м можуть визначатися за формулами:

$$\sigma_y = \alpha_y \frac{x}{\sqrt{1+10^{-4}x}}, \quad \sigma_z = \alpha_z \frac{x}{S_z(x)},$$

де α_y , α_z і $S_z(x)$ визначаються у відповідності до таблиці 1.4.

Таблиця 1.4

Залежність параметрів розсіювання від стану атмосфери [1.2]

Клас стійкості	α_y	α_z	$S_z(x)$
A	0,22	0,2	1
B	0,16	0,12	1
C	0,11	0,08	$\sqrt{1+1,5 \cdot 10^{-4}x}$
D	0,08	0,06	$\sqrt{1+2 \cdot 10^{-4}x}$
E	0,06	0,03	$\sqrt{1+3 \cdot 10^{-4}x}$
F	0,04	0,02	$\sqrt{1+3 \cdot 10^{-4}x}$

Подібні дані є також і для умов міста і пересіченого рельєфу. З табл. 1.4 випливає, що параметри розсіювання σ_y і σ_z зменшуються при віддаленні від джерела, причому особливо помітно – при стійкому стані атмосфери. Недоліком формули (1.60) є її емпіричний характер і часто неузгоджені значення експериментально визначених параметрів.

Викиди з димарів звичайно мають деяку початкову швидкість (по вертикалі) і перегріті відносно навколишнього повітря. Внаслідок цього має місце початковий підйом домішки, тобто джерело викиду немов би підняте над устям труби (рис. 1.13). Для оцінки початкового підйому запропоновано низку формул [1.2; 1.15]. Одна з них, яка заснована на розв'язанні системи рівнянь руху і переносу тепла в потоці, що зносить димовий струм, має вигляд:

$$\Delta h = \frac{3,75 w_0 R_0}{u_{10}} + \frac{1,6 g W_1 \Delta T}{T_a \cdot u_{10}^3},$$

де $W_1 = \pi R_0^2 w_0$ – об'ємна витрата газів, що викидаються, w_0 – вертикальна швидкість домішки на виході з труби, T_a – температура навколишнього повітря, ΔT – перегрів домішки, u_{10} – швидкість вітру на висоті 10 м. Наприклад, при $T_a=300$ К, $R_0=5$ м, $\Delta T=200$ К, $w_0=1$ м/с, $u=5$ м/с, збільшення висоти викиду складе близько 11 м.

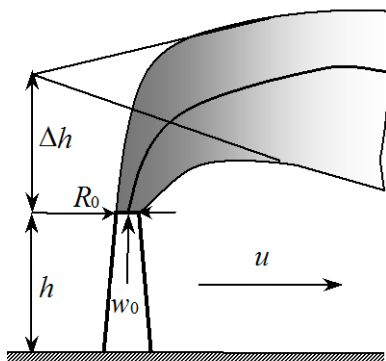


Рис. 1.13. Початковий підйом домішок над устям труби

При малій швидкості вітру і штилі Δh не може перевищувати деякої межі, для якої в [1.2] запропоновані оцінки. Дифузія домішки від точкового джерела може супроводжуватися наступними фізичними ефектами [1.7]:

1) опусканням димового струменя внаслідок охолодження водяної пари, конденсації і випару крапельок води, що містяться в струмені. Присутність крапель води в струмені сприяє більш швидкому випаданню домішок;

2) затіканням холодного повітря в трубу при малій швидкості витікання газів, що викидаються, наслідком чого є утворення сажі і кіптяви на внутрішній поверхні труби.

1.11. МОДЕЛІ ПОШИРЕННЯ ДОМІШОК В АТМОСФЕРІ

Існуючі моделі переносу домішок в атмосфері, засновані на представленнях механіки суцільного середовища, є або аналітичними розв'язками рівняння турбулентної дифузії, або алгоритмами його чисельного вирішення. Перевагою аналітичних методів є їхня порівняльна простота, зручність обчислювальної реалізації, введення вихідних даних. З іншого боку, чисельні методи дозволяють детально досліджувати особливості вітро-

вих течій, обумовлені рельєфом, неоднорідністю земної поверхні і зміною швидкості вітру з висотою та вплив цих чинників на процес поширення домішки. Однак застосування чисельних методів вимагає розробки спеціальних програмних засобів.

Далі будуть розглянуті найбільш прості аналітичні моделі поширення домішок в атмосфері. Чисельні алгоритми вирішення рівняння дифузії і переносу докладно висвітлені в [1.5; 1.18; 1.25].

Область поширення домішки звичайно приймається необмеженою по горизонталі й обмеженою знизу земною поверхнею. Для постійних викидів використовуються моделі стаціонарного розсіювання, для миттєвих викидів – моделі нестаціонарного переносу.

Одновимірні моделі мають переважно теоретичне значення. Найпростіша одновимірна модель базується на рівнянні стаціонарного переносу і дифузії з розпадом домішки [1.5]

$$D \frac{d^2\varphi}{dx^2} - u \frac{d\varphi}{dx} - \sigma\varphi = -q\delta(x - x_0), \quad (1.61)$$

в якому q – інтенсивність викиду, розташованого в точці x_0 . Дана модель може бути застосована, наприклад, при описі розсіювання легкої домішки, що поширюється від автотраси при поперечному вітрі. Рішення рівняння (1.61) при однорідних умовах при $|x| \rightarrow \infty$ має вид:

$$\varphi(x) = \frac{q}{\lambda} \begin{cases} \exp\left(-\frac{\lambda - v}{2D}(x - x_0)\right), & x \geq x_0, \\ \exp\left(-\frac{\lambda + v}{2D}(x_0 - x)\right), & x \leq x_0, \end{cases} \quad (1.62)$$

де $\lambda = \sqrt{u^2 + 4D\sigma}$.

Більш адекватною реальному процесу переносу домішок є двовимірна модель стаціонарного розсіювання від точкового джерела, що описана в розділі 1.9 (формула (1.54)).

У випадку лінійного чи площинного джерела викиду в двовимірному потоці розрахункові формули можуть бути отримані шляхом інтегрування виразу (1.60) уздовж контуру або по пло-

щі джерела. Так, для лінійного джерела (ділянки автотраси) маємо

$$\varphi_l(x, y) = q_l \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x - \xi, y - l(\xi)) d\xi = q_l \int_{\eta_1}^{\eta_2} \varphi(x - m(\eta), y - \eta) d\eta, \quad (1.63)$$

де $y=l(x)$ і $x=m(y)$ – дві форми рівняння відрізка контуру, що задається точками з координатами (x_1, y_1) і (x_2, y_2) ; q_l – інтенсивність викидів на одиницю довжини ділянки (кг/м·с).

Разовий викид і подальший далекий перенос хмари забруднення в рамках двовимірної моделі описується нестационарним рівнянням переносу, аналітичний розв'язок якого має вигляд

$$\varphi(x, y, t) = \frac{M_0 e^{-\sigma t}}{4\pi H \sqrt{D_x D_y t}} \exp \left\{ -\frac{(x - x_0 - ut)^2}{4D_x t} - \frac{(y - y_0 - vt)^2}{4D_y t} \right\}, \quad (1.64)$$

де M_0 – маса речовини у викиді; H – висота шару поширення домішки; (x_0, y_0) – координати викиду.

При розсіюванні домішки на відносно невеликих відстанях від викиду слід враховувати нерівномірний розподіл концентрації з висотою, що може бути зроблено в рамках тривимірної моделі. Наприклад, стаціонарне розсіювання вагової домішки, що викидається трубою на висоті h у точці з координатами (x_0, y_0) при постійній по висоті швидкості вітру u , описується рівнянням

$$D \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + D_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + w_s \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \sigma \varphi = -q \delta(x - x_0, y - y_0, z - h). \quad (1.65)$$

Розв'язком рівняння (1.65) буде вираз

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{8\pi D} e^{\frac{u(x-x_0)}{2D} - \frac{w_s(z-h)}{2D_z}} \left[\frac{e^{-\beta \rho_1}}{\rho_1} \pm \frac{e^{-\beta \rho_2}}{\rho_2} \right], \quad (1.66)$$

$$\rho_{1,2} = \sqrt{(z \mp z_0)^2 + \frac{D_z}{D} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]},$$

$$\beta = \sqrt{\frac{u^2 + 4D\sigma_1}{4DD_z}}, \quad \sigma_1 = \sigma + \frac{w_s^2}{4D_z}.$$

У формулі (1.66) знак «+» у квадратних дужках береться у випадку повного відбиття домішки від земної поверхні ($\alpha=0$ в умові (1.40)), знак «-» – у випадку її повного поглинання ($\alpha=\infty$ в умові (1.40)).

Стационарний точковий викид може бути також описаний спрощеною моделлю гауссового розсіювання (розділ 1.11), в якій передбачається, що дифузія вздовж потоку мала в порівнянні з конвективним переносом.

Тривимірна модель нестационарного переносу домішок у горизонтальному напрямку розглянута в лабораторній роботі № 2.

ПИТАННЯ ТА ВПРАВИ ДО РОЗДІЛУ

1. Розрахувати потік вологи, яка випаровується з поверхні ґрунту за таких умов: $q_1=950$ Па, $q_2=900$ Па, $u_1=2$ м/с, $u_2=2.5$ м/с, $z_1=1$ м, $z_2=5$ м.
2. У чому полягають причини конденсації та випадання атмосферних опадів?
3. Куди спрямовано відхилення для південно-західного, північно-східного вітрів внаслідок впливу сили Кориоліса?
4. У чому полягає нелінійність математичної моделі повітряних течій в атмосфері? Чи пов'язане це з турбулентністю?
5. Користуючись співвідношеннями (1.20) та (1.21), одержати формулу (1.24).
6. Який вигляд прийме система рівнянь (1.26) для екваторіальних та полярних широт?
7. Де висота шару Екмана більше: на екваторі чи поблизу полюсів?
8. Як змінюються параметри розсіювання домішки в залежності від сталості атмосфери?
9. На скільки збільшується коефіцієнт дифузії (горизонтальної та вертикальної) при підйомі з 1 м до 20 м, до 100 м? Шорсткість поверхні $z_0=0.1$ м.

10. Через який час нейтралізується 95% газу CO , якщо постійна де-струкції $\sigma=10^{-4} \text{ c}^{-1}$?
11. Як впливає швидкість осідання вагомих часток домішки на максимум приземної концентрації та його положення відносно місця викиду?
12. Користуючись асимптотичним розкладом функції Макдональда K_0 , визначити, на якій відстані концентрація за напрямком вітру зменшиться на 90% від концентрації поблизу місця викиду (на відстані 10 м від нього). Використати двовірну модель. Швидкість вітру 3 м/с, $D=2 \text{ м}^2/\text{с}$.
13. Як впливає швидкість вітру та коефіцієнт дифузії на розподіл концентрації домішок в атмосфері?
14. Які граничні умови ставляться при формулюванні задачі переносу та розсіювання домішок в атмосфері?
15. У чому полягає суть статистичної моделі для розрахунку концентрації домішок в умовах зміни руху повітряних мас?
16. Як залежить усталеність атмосфери від часу доби, швидкості вітру, інших чинників?
17. Розрахувати початковий підйом газів над трубою висотою 50 м за таких умов: $w_0=2 \text{ м/с}$, $R_0=8 \text{ м}$, $u_{10}=4 \text{ м/с}$, $T_a=270 \text{ К}$, $\Delta T=250 \text{ К}$. При якому значенні швидкості вітру початковий підйом буде дорівнювати висоті труби?

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна

- 1.1. Атмосферная диффузия и загрязнение воздуха. М.: Изд-во ИЛ, 1962. 512 с.
- 1.2. **Берлянд М. Е.** Современные проблемы атмосферной диффузии и загрязнение воздуха. Л.: Гидрометеоиздат, 1985. 273 с.
- 1.3. **Бызова Н. Л.** Рассеивание примесей в пограничном слое атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1971. 190 с.
- 1.4. **Израэль Ю. А., Назаров И. М.** Кислотные дожди. Л.: Гидрометеоиздат, 1998. 269 с.
- 1.5. **Марчук Г. И.** Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 320 с.
- 1.6. **Матвеев Л. Г.** Курс общей метеорологии. Физика атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1976. 640 с.

- 1.7. **Скорер Р. С.** Аэрогидродинамика окружающей среды. М.: Мир, 1980. 549 с.
- 1.8. **Хргиан А. Х.** Физика атмосферы. М.: МГУ, 1986, 328 с.

Додаткова

- 1.9. **Акименко В. В.** Математическое моделирование экологического состояния пограничного слоя атмосферы региона. Луганск: Изд-во Вост.-Укр. гос. ун-та. 1998. 192 с.
- 1.10. **Антошкіна Л. І., Біляєв М. М., Коренюк Є. Д., Хрущ В. К.** Стан довкілля: моделі та прогноз. Д.: Наука і освіта, 2003. 328 с.
- 1.11. Атмосферная турбулентность и моделирование распространения примесей / Под ред. Ф. Т. М. Ньистада и Х. Ван Допа. Л.: Гидрометеиздат, 1985. 352 с.
- 1.12. **Беляев Н. Н., Коренюк Е. Д., Хрущ В. К.** Прогнозирование качества воздушной среды методом вычислительного эксперимента. Д.: Наука и образование, 2000. 208 с.
- 1.13. **Братсерт У. Х.** Испарение в атмосфере. Л.: Гидрометеиздат, 1985. 351 с.
- 1.14. **Бретшнайдер Б., Курфюрст И.** Охрана воздушного бассейна от загрязнений. Л.: Химия, 1989. 288 с.
- 1.15. **Бруцкий Е. В.** Теория атмосферной диффузии радиоактивных выбросов. К.: Ин-т гидромеханики НАН Украины, 2000. 443 с.
- 1.16. **Будаговский А. И.** Испарение почвенных вод / Физика почвенных вод. М.: Наука, 1981. С. 13–95.
- 1.17. **Бызова Н. Л., Гаргер Е. К., Иванов В. Н.** Экспериментальные исследования атмосферной диффузии и расчеты рассеяния примесей. Л.: Гидрометеиздат, 1991. 278 с.
- 1.18. **Згуровский М. З., Скопецкий В. В., Хрущ В. К., Беляев Н. Н.** Численное моделирование распространения загрязнений в окружающей среде. К.: Наук. думка, 1997. 368 с.
- 1.19. **Лоренц Э. И.** Природа и теория общей циркуляции атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1970. 259 с.
- 1.20. **Марчук Г. И.** Численное решение задач динамики атмосферы и океана. М.: Наука, 1973. 303 с.
- 1.21. **Мезингер Ф., Аракава А.** Численные методы, используемые в атмосферных моделях. Л.: Гидрометеиздат, 1979. 136 с.
- 1.22. Методика расчета концентраций в атмосферном воздухе вредных веществ, содержащихся в выбросах предприятий. ОНД 86. Госкомгидромет. Л.: Гидрометеиздат, 1987. 91 с.

- 1.23. **Монин А. С., Обухов А. М.** Основные закономерности турбулентного перемешивания в приземном слое атмосферы // Тр. Геофиз. Ин-та АН СССР, 1954. № 24(151). С. 163–187.
- 1.24. **Обухов А. М.** Турбулентность и динамика атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1988. 413 с.
- 1.25. **Пененко В. В., Алоян А. Е.** Модели и методы для задач охраны окружающей среды. Новосибирск: Наука, 1985. 256 с.
- 1.26. **Сеттон О. Г.** Микрометеорология. Л.: Гидрометеиздат, 1958. 355 с.
- 1.27. **Тищенко Н. Ф.** Охрана атмосферного воздуха. Расчет содержания вредных веществ и их распределение в воздухе. М.: Химия, 1991. 368 с.
- 1.28. **Хэнкс Р. Дж., Ашкрофт Дж. Л.** Прикладная физика почв. Л.: Гидрометеиздат, 1985. 151 с.

2. МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ У ПОВЕРХНЕВИХ ВОДАХ

2.1. РУСЛОВІ ПРОЦЕСИ

Під русловими процесами розуміється зміна будови річкового русла і заплави під дією проточної води. Їхніми основними факторами є стік води, стік наносів і обмежуючі умови. Як величина стоку води розглядається середньорічний стік і особливості його розподілу на протязі року. Для річок у помірному кліматі характерні весняна повінь і літня та частково зимова межень. Повінь розуміється як щорічно повторюване за один і той же сезон відносно тривале збільшення витрати в річці та підйом рівня води в ній. Під час повені затоплюється частина дна річкової долини, яка називається заплавою. Меженню називається щорічно повторюване сезонне стояння низького рівня води в річках. Щодо величини стоку, то, наприклад, середньорічний стік Дніпра складає 1663 м³/с, Дністра – 274 м³/с, Сіверського Донця – 159 м³/с, Південного Бугу – 137 м³/с [2.6].

Стік наносів відбувається за рахунок переносу потоком частинок ґрунту, що надходять з басейну ріки при розмиві русла і заплави. Врахування цього фактора необхідне, наприклад, при розрахунках водовідстійників, замулення та занесення водоймищ і т. п. Під обмежуючими умовами розуміються геологічні особливості русел і заплав, а також споруди, що перешкоджають розвитку деформацій (греблі, мости тощо).

До складу природних наносів можуть входити частинки глини, мулу, піску, а також гравій і галька. Механічними характеристиками наносів є середній розмір (середня крупність), щільність, параметри форми частинок. Середній діаметр \bar{d} визначається як лінійний розмір середньої за крупністю частинки, і дорівнює діаметру кулі того ж обсягу. При цьому

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i p_i}{100}, \quad \sum p_i = 100,$$

де p_i – відсоток частинок з діаметром d_i . Значення \bar{d} змінюються від 0.0032 до 100 мм. Густина наносів ρ_n змінюється від 0,7 г/см³ для мулу до 3 г/см³ для гальки, середнє значення ρ_n складає 2,4–2,7 г/см³. Найбільш часто серед наносів зустрічаються частинки у формі еліпсоїда, при цьому відношення площ їхніх поверхонь до площі кулі рівного об'єму близько до 1.34 [2.1].

Основними гідравлічними характеристиками наносів є гідравлічна крупність і критична швидкість зриву і зрушення зерен на дні турбулентного потоку (див. також табл. 2.1). Гідравлічна крупність w_g являє собою швидкість вільного рівномірного падіння частинок у незбуреному середовищі. Значення w_g залежить від форми частинок, їхньої густини, розміру, режиму падіння (ламінарного чи турбулентного). Для ламінарної течії можна скористатися виразом на основі розв'язку Стокса, що для найбільш розповсюджених еліпсоподібних частинок має вид

$$w_g = \Delta\rho g \bar{d}^2 / 24\mu,$$

де $\Delta\rho$ – різниця густини частинки і води, μ – динамічна в'язкість. При $\rho_n=2$ г/см³ і $\bar{d}=1$ мм відповідно до цієї формули одержимо $w_g \approx 4$ мм/с. В.Н. Гончаров запропонував загальну формулу, придатну для ламінарного, перехідного і турбулентного режимів падіння [2.1]

$$w_g = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{2g\Delta\rho\bar{d}}{1.75\rho}},$$

де ρ – густина води, γ – емпіричний параметр ($\gamma=1$ для турбулентного потоку, $\gamma>1$ для ламінарного і перехідного режиму).

Таблиця 2.1

Деякі характеристики наносів

Тип ґрунту	Розмір зерен, мм	Гідравлічна крупність, м/с (20°C)	Параметр турбулентності γ	Густина, кг/м ³
Глина	0.0015–0.005	$0.007 \cdot 10^{-3}$	1100	–
Мул	0.005–0.15	$0.066 \cdot 10^{-3} - 6.6 \cdot 10^{-3}$	6.5 – 210	700–1100
Пісок	0.15–1.5	$3.44 \cdot 10^{-2} - 0.11$	1.23	1500–1800
Гравій	1.5–15	0.24 – 0.42	1	1800–2000

Процес зриву і переносу окремих частинок на дні потоку досить складний. Тому для визначення критичної швидкості зриву $u_{кр}$ запропоновано декілька розрахункових формул, що не мають строгого теоретичного обґрунтування; в більшості з них $u_{кр} \sim \sqrt{d}$. Отримані Гончаровим формули для w_g і $u_{кр}$ подібні, що дозволяє прийти до простого співвідношення $u_{кр}=1.25\gamma w_g$.

За формою переміщення наноси поділяють на завислі, які переносяться в товщі потоку, і волочені, котрі переміщуються по його дну. Перенос завислих наносів може бути описаний на основі дифузійної теорії, якщо прийняти, що гідравлічна крупність w_g дорівнює нулю. Експериментально встановлено, що волочені наноси можуть переміщуватися шляхом перекошування частинок по дну у вигляді гряд або так званих сальтацій («стрибків») з відривом від дна. Для розрахунку переміщення волочених наносів запропонована велика кількість емпіричних формул [2.1]. Перенос наносів має сезонний характер, сильно змінюючись під час повені та межені.

Виділяються кілька типів відкладення наносів у руслах річок (рис. 2.1). При стрічногрядному відкладенні в слабозвивистому руслі відбувається сповзання по дну одиночних стрічкових гряд. При побічному – відбувається сповзання великих гряд з перекошеним розташуванням їхніх гребенів і виникнення піднесених частин у берегів ріки. При меандруванні з часом змінюється кривизна (звивистість) русла: увігнутий берег нижче вершини закруту розмивається, опуклий – намивається. При вільному меандруванні русло може досягти стану петлі. Багато рукавність є наслідком меандрування, при цьому утворюється серія спрямляючих проток, як у заплаві, так і в руслі.

Для опису руслових процесів в умовах регульованого водного режиму використовуються поняття створ та б'єф. Створ ріки розуміється як її ділянка, де розташовані споруди гідровузла, що забезпечують підйом рівня води та сприймають її напір. Б'єф – частина водотоку чи каналу, що розташована по різні сторони від напірної споруди (греблі). Виділяють верхній б'єф (вище за течією) та нижній б'єф (нижче за течією від гідротехнічної споруди).

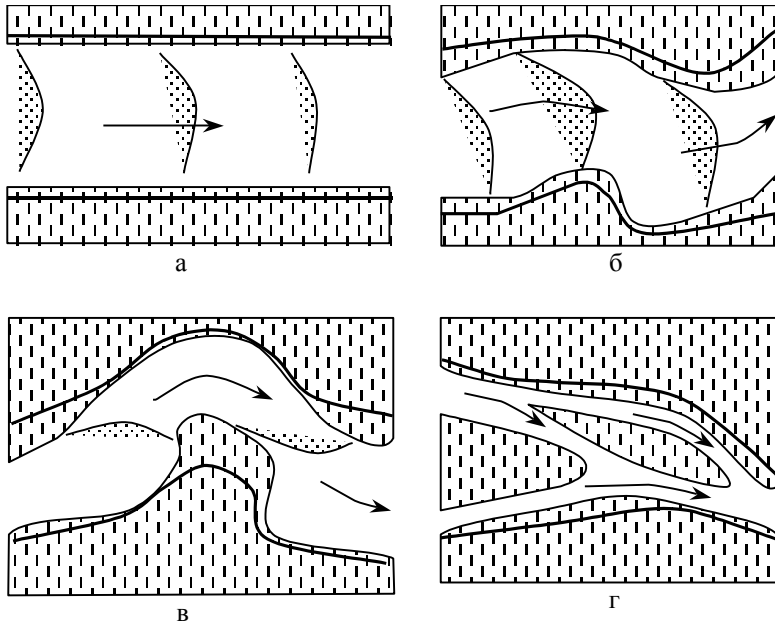


Рис. 2.1. Основні типи відкладень наносів у руслах:

а) стрічногрядний, б) побічний, в) меандрування,
г) багаторукавність. Контури заплави позначені жирною кривою

При наявності гребель у руслі утворюються три зони: зона виклинювання підпору вище водоймища, зона водоймища і зона нижнього б'єфа від греблі до створу з природним непорушеним режимом. У зоні водоймища відбувається акумуляція наносів: замулення (осадження завислих наносів по всій площі), і занесення (відкладення донних наносів, які переміщуються з верхньої частини водоймища в напрямку греблі). Крім того, під дією вітрового хвилювання відбувається розмивання підтоплених берегів і наступне вирівнювання берегової лінії під впливом подовжніх течій. Для розрахунку цих процесів може бути використана методика Н. С. Кондратьєва [2.1]. У зоні нижнього б'єфа кількість наносів зменшується, підсилюються розмиви, відбувається вирівнювання річного стоку по сезонах.

2.2. ТРАНСФОРМАЦІЯ РЕЧОВИН У ВОДНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Якість поверхневих вод, у першу чергу, визначається складом стічних вод, що скидаються до гідрографічної мережі. Найбільш розповсюдженими забруднювачами, які містяться в стічних водах, є: нафтопродукти, феноли, поверхнево-активні речовини (ПАР), з'єднання азоту і фосфору, солі важких металів, господарсько-побутові стоки [2.8; 2.9]. Ступінь забруднення води характеризується концентрацією шкідливих компонентів, що містяться в ній у розчиненому чи зваженому вигляді. Для органічних сполук також вводяться такі показники, як БСК (рос. БПК), ХСК (рос. ХПК), перманганатна окислюваність (O_{KMnO_4}).

БСК – біохімічне споживання кисню, що витрачається на окислювання органічної речовини в стічних водах. Повне споживання O_2 на окислювання настає приблизно через 20 днів, тому вважається, що $BCK_{повн} \approx BCK_{20}$. На практиці БСК звичайно визначається через 5 діб, причому вважається, що $BCK_{повн} \approx 1.47 BCK_5$. Середньо-багаторічне значення BCK_5 складає для побутових стічних вод до очищення 180 мг/л, після нього – 16 мг/л.

ХСК – хімічне споживання кисню, або його кількість, необхідна для хімічного окислювання органічних речовин у стічних водах. Середньо-багаторічне значення ХСК побутових стічних вод складають 406 мг/л O_2 .

Перманганатна окислюваність характеризує вміст легкоокислюваних органічних речовин. Середньо-багаторічне значення O_{KMnO_4} складає 55 мг/л.

Очищення забруднених поверхневих вод відбувається за рахунок розведення стічних вод у водоймі (водотоці), а також у результаті біохімічних і фізико-хімічних процесів: окислювально-відновного перетворення речовин, сорбції та десорбції, утворення важкорозчинних з'єднань тощо. При сорбції (десорбції) відбувається зв'язування (звільнення) речовини на поверхні твердих частинок у наносах та в донних відкладеннях.

Через велику складність цих процесів для їхнього опису можливі два підходи: 1) сумарне врахування швидкостей трансформації речовин за натурними даними; 2) диференційоване врахування окремих чинників шляхом вивчення в лабораторних умовах.

Як приклад першого підходу розглянемо просту модель Стрітера-Фелпса [2.9] самоочищення водного середовища.

Баланс кисню у водотоці описується системою рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_1}{dt} = -K_1\varphi_1, \\ \frac{d\varphi_2}{dt} = K_1\varphi_1 - K_2\varphi_2, \end{cases} \quad (2.1)$$

де φ_1 – концентрація органічної речовини (в одиницях БСК); φ_2 – дефіцит кисню, який визначається як різниця між концентрацією O_2 у воді при насиченні і фактичному вмісті; K_1 – константа швидкості окислювання речовини або коефіцієнт неконсервативності, діб^{-1} ; K_2 – коефіцієнт швидкості реаерації (насичення киснем забрудненої води в річці нижче місця скидання стічних вод), діб^{-1} ; $t=x/v$, x – відстань уздовж течії ріки (довжина розглянутої ділянки), v – швидкість течії. У початковому створі задані концентрації речовини і кисню: $\varphi_1(0)=\varphi_1^{(0)}$, $\varphi_2(0)=\varphi_2^{(0)}$.

Тоді розв'язком системи (2.1) буде

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_1^{(0)} e^{-K_1 t}, \\ \varphi_2 = \varphi_2^{(0)} e^{-K_2 t} + \frac{K_1 \varphi_1^{(0)}}{K_2 - K_1} (e^{-K_1 t} - e^{-K_2 t}). \end{cases} \quad (2.2)$$

Модель відбиває процес зменшення БСК і вмісту кисню з часом. На деякому віддаленні від місця скидання дефіцит кисню досягає максимуму, після чого відбувається зростання його концентрації за рахунок реаерації водотоку (рис. 2.2). У дану модель згодом були внесені уточнення, що стосуються визначення параметра K_1 з урахуванням перемішування в потоці, складу забруднення, зміни температури. Параметр K_2 визначається за емпіричними формулами, що враховують параметри потоку (швидкість, глибину, витрату). У загальному ви-

падку параметри K_1 і K_2 не є константами, а залежать від особливостей потоку, вмісту мікроорганізмів і рослин у водотоці.

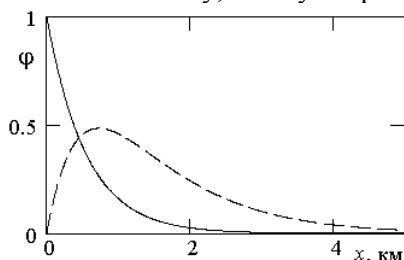


Рис. 2.2 Зміна концентрації органічного забруднювача (—) та дефіциту O_2 (---) в річковій воді

Для оцінки процесу самоочищення можна використовувати поняття питомої швидкості самоочищення $v = (\varphi_0 - \varphi_1) / M t$ (діб⁻¹), де φ_0 і φ_1 — концентрація речовин на вході і виході з водної системи, M — сумарна концентрація мікроорганізмів у ній, t — середній час перебування забрудненої води в системі.

Для опису процесів у водних екосистемах запропонована велика кількість математичних моделей [2.9]. У них переважно на основі систем звичайних диференціальних рівнянь виду (2.2) відтворюється ріст ряду мікроорганізмів і динаміка окремих хімічних сполук.

Відповідно до сучасних уявлень процес сорбції протікає в два етапи: швидка фізична адсорбція і наступне повільне утворення міцних хімічних зв'язків (хемосорбція). Як адсорбент (матеріал, що поглинає речовину на поверхні) виступає матеріал зважених наносів і донних відкладень. Адсорбція описується звичайно як рівноважний процес (див. також розділ 3.6). Хемосорбція описується як нерівноважний процес, що описується законами термодинаміки. Складний механізм десорбції менш вивчений.

2.3. ГІДРАВЛІЧНІ ПАРАМЕТРИ ВІДКРИТОГО ПОТОКУ

Рівняння Бернуллі балансу питомої енергії потоку від живого перетину 1 до живого перетину 2 (рис. 2.3) має вигляд [2.4]:

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 u_2^2}{2g} + h_w, \quad (2.3)$$

де z – висота; P – гідродинамічний тиск; γ – питома вага рідини; u – середня швидкість потоку, яка дорівнює відношенню витрати рідини Q до площі живого перетину ω ; α – коефіцієнт Кориоліса (коефіцієнт кінетичної енергії), що враховує нерівномірність розподілу швидкостей у живому перетині; h_w – втрати напора на подолання гідравлічного опору.

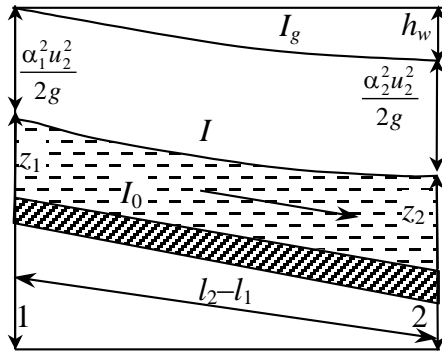


Рис. 2.3. Схема безнапірного потоку у відкритому руслі

Оскільки течії у відкритих руслах є безнапірними, то $P_1 = P_2 = P_{атм}$, тому гідравлічний похил, осереднений уздовж потоку, дорівнює

$$I_g = \frac{1}{l_2 - l_1} \left\{ \left(z_1 + \frac{\alpha_1 u_1^2}{2g} \right) - \left(z_2 + \frac{\alpha_2 u_1^2}{2g} \right) \right\}. \quad (2.4)$$

Похил вільної поверхні води визначається як відношення падіння поверхні водотоку до його довжини

$$I = (z_1 - z_2) / (l_1 - l_2). \quad (2.5)$$

При рівномірному русі $I_0 = I_G = I$, де I_0 – похил дна водотоку.

Гідравлічне рівняння нерозривності потоку має вигляд

$$Q_1 = Q_2, \text{ або } u_1 \omega_1 = u_2 \omega_2. \quad (2.6)$$

Втрати напора на подолання гідравлічного опору багато в чому залежать від режиму течії, який встановлюється згідно з числом Рейнольдса $Re = vR/\nu$, де $R = \omega/\chi$ – гідравлічний радіус, χ – довжина змоченого периметра, ν – кінематична в'язкість. Розрахункові формули величин ω , χ і R для каналів прямокутного і трапецеїдального перетину (рис. 2.4) наведені в табл. 2.2. Для відкритих русел при $Re < 300$ має місце ламінарний рух, при $Re > 300$ – турбулентний.

Гідравлічні параметри каналів

	Прямокутний перетин	Трапецеїдальний перетин
Площа поперечного перерізу ω	bh	$(b+mh)h, m=\text{ctg}\alpha$
Змочений периметр χ	$b+2h$	$b+2h\sqrt{1+m^2}$
Гідравлічний радіус R	$\frac{bh}{b+2h}$	$\frac{(b+mh)h}{b+2h\sqrt{1+m^2}} = \frac{(1+mh/b)h}{1+2h\sqrt{1+m^2}/b}$

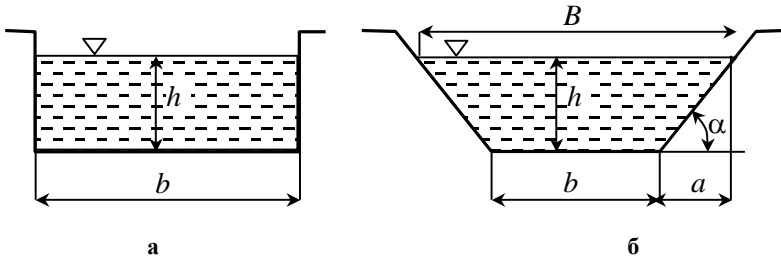


Рис. 2.4. Поперечний переріз каналів:

а) прямокутного перетину, б) трапецеїдального перетину

Втрати напору h_w складаються з утрат напору на подолання опорів вздовж потоку h_l і місцевих опорів h_M : $h_w=h_l+h_M$. Величина h_l може бути визначена за формулою

$$h_l = \frac{u^2}{C^2} \frac{l}{R}, \quad (2.7)$$

де C – коефіцієнт Шезі, $\text{м}^{0.5}/\text{с}$; l – довжина ділянки русла. Коефіцієнт Шезі змінюється від 10–20 для струмків і малих рік до 80–100 для великих рік. Безрозмірний коефіцієнт Шезі $C^* = C/\sqrt{g}$ являє собою відношення середньої швидкості потоку до динамічної швидкості

$$C^* = u/u^* = u/\sqrt{gRI} = \sqrt{Fr/I}, \quad (2.8)$$

де $Fr = u^2/(gR)$ – число Фруда. Звідси

$$u = C\sqrt{RI}, \quad Q = \omega C\sqrt{RI}. \quad (2.9)$$

При розрахунках каналів користуються також витратною характеристикою $K = \omega C K = \omega / C \sqrt{R}$. Тоді відповідно до (2.9)

$$Q = K \sqrt{I}. \quad (2.10)$$

Розподіл швидкостей за глибиною турбулентного потоку описується різними формулами [2.2; 2.4]. Найбільш обґрунтованими є логарифмічна і степенева залежності:

$$u = u_{max} - \frac{\sqrt{g h I}}{\kappa} \ln \frac{h}{z}, \quad (2.11)$$

$$u = u_{max} \left(\frac{z}{h} \right)^{1/m} \quad \text{або} \quad u = u_{нов} - 20 \sqrt{RI} \left(\frac{h-z}{h} \right)^2, \quad (2.12)$$

де u_{max} – найбільша швидкість по вертикалі, що спостерігається, як правило, на поверхні; $u_{нов}$ – швидкість течії на поверхні; z – відстань від дна;

$$\kappa = \frac{2}{1 + C^*} + 0.3, \quad m = \kappa C^*. \quad (2.13)$$

Для визначення витрати в руслах складного поперечного перетину рекомендується формула [2.2] (рис. 2.5)

$$Q = \beta^* \omega C \sqrt{h_{cp} I}, \quad (2.14)$$

де $\beta^* = S(h^{3/2}) / B h_{cp}^{3/2}$, $S(h^{3/2})$ – площа епюри $h^{3/2}$, h_{cp} – середня глибина у перетині.

Коефіцієнт Шезі може бути обчислений таким чином [2.2]:

$$C = \frac{1}{2} \xi + \sqrt{\frac{1}{4} \xi^2 + \frac{\sqrt{g}}{0.13} \left(\frac{1}{n} + \sqrt{g} \lg R \right)}, \quad \xi = \frac{1}{n} - \frac{\sqrt{g}}{0.13} (1 - \lg R).$$

Тут n – коефіцієнт шорсткості, що складає 0.01–0.04 для каналів, 0.03–0.2 – для природних русел. Для наближених розрахунком можна користатися формулою Н. Н. Павловського

$$C = \frac{1}{n} R^y, \quad (2.16)$$

де y залежить від n і змінюється від 0.1 до 0.5.

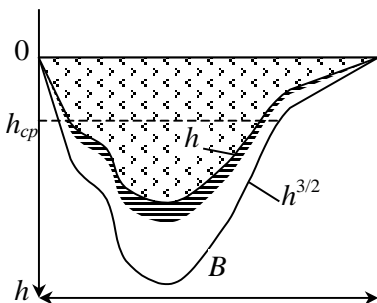


Рис. 2.5. Схема до визначення витрати в руслах складного поперечного перетину

Формула Маннінга має той же вигляд, у ній прийнято $y=1/6$.

Коефіцієнт Кориоліса α , що входить до рівняння Бернуллі, можна обчислити за формулою Г.В. Железнякова

$$\alpha = 1.3 + \frac{0.88(1 + 1/C^*)}{2.3 + 0.3C^*}, \quad (2.17)$$

Значення α в природних умовах звичайно лежать у діапазоні (1.05, 1.7), хоча інколи можуть досягати 3.0.

2.4. НЕРІВНОМІРНИЙ УСТАЛЕНИЙ РУХ ВОДИ У ВІДКРИТИХ РУСЛАХ

При нерівномірному русі середня швидкість u , глибина h , похил I вільної поверхні змінюються вздовж течії; гідравлічний похил I_g , похил вільної поверхні й похил дна I_0 не дорівнюють один одному $I_g \neq I \neq I_0$, при цьому

$$I_g = \frac{dh_w}{dl}, \quad I_0 = -\frac{dz}{dl}, \quad I = -\frac{dH}{dl}, \quad H = z + \frac{P}{\gamma} = z + h, \quad (2.18)$$

де l – координата, яка відлічується вниз за течією.

Через складність форми природних русел обмежимося простими руслами, для яких витратна характеристика K є неперервною функцією глибини за умови $dK/dh > 0$. Серед таких русел можна виділити призматичні, для яких форма і ширина поперечного перерізу незмінні вздовж русла, вісь l – пряма, тому площа перетину ω залежить тільки від h . Площа поперечного перерізу непризматичних русел залежить як від координати l , так і глибини h : $\omega = \omega(l, h)$. При виведенні рівняння руху будемо також припускати сталість витрати Q уздовж русла.

Після диференціювання рівняння Бернуллі одержимо вираз

$$dH + d \frac{\alpha u^2}{2g} + dh_w = 0, \quad (2.19)$$

який віднесемо на довжину ділянки dl :

$$-\frac{dH}{dl} = \frac{d}{dl} \left(\frac{\alpha u^2}{2g} \right) + \frac{dh_w}{dl}. \quad (2.20)$$

Підставивши в (2.20) третє співвідношення з (2.18), і зневажаючи місцевими втратами напору ($h_w \approx h_l$) та використовуючи вираз (2.7), одержимо першу форму рівняння нерівномірного сталого руху

$$I = \frac{d}{dl} \left(\frac{\alpha u^2}{2g} \right) + \frac{u^2}{C^2 R}, \quad (2.21)$$

в якому u , C і R відповідають дійсній глибині потоку h .

Ліву частину рівняння (2.21) з урахуванням (2.18) можна записати

$$I = I_0 - \frac{dh}{dl}. \quad (2.22)$$

Перший доданок правої частини рівняння (2.21) перетворимо за правилами диференціювання:

$$\frac{d}{dl} \left(\frac{\alpha u^2}{2g} \right) = \frac{d}{dl} \left(\frac{\alpha Q^2}{2g\omega^2} \right) = -\frac{\alpha Q^2}{g\omega^3} \left(\frac{\partial \omega}{\partial l} + B \frac{dh}{dl} \right). \quad (2.23)$$

Тут було прийнято, що $\partial \omega / \partial h$ дорівнює B – ширині русла на рівні поверхні води. Підставивши (2.23) до (2.21), одержимо

$$I_0 - \frac{dh}{dl} = -\frac{\alpha Q^2}{g\omega^3} \left(\frac{\partial \omega}{\partial l} + B \frac{dh}{dl} \right) + \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R},$$

звідкіля можна виразити dh/dl :

$$\frac{dh}{dl} = \frac{I_0 - \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R} + \frac{\alpha Q^2}{g \omega^3} \frac{\partial \omega}{\partial l}}{1 - \frac{\alpha Q^2}{g \omega^3} b} = \frac{I_0 - \frac{Q^2}{K^2} \left(1 - \frac{\alpha C^2 R}{g \omega} \frac{\partial \omega}{\partial l} \right)}{1 - \frac{\alpha u^2}{g \omega} b}. \quad (2.24)$$

Співвідношення (2.24) є другою формою рівняння нерівномірного руху.

Якщо ω не змінюється вздовж русла, то (2.24) приймає вигляд

$$\frac{dh}{dl} = \frac{I_0 - \frac{Q^2}{K^2}}{1 - Fr_1} = I_0 \frac{1 - \frac{K_0^2}{K^2}}{1 - Fr_1}, \quad Fr_1 = \frac{\alpha u^2}{g \omega} b.$$

де K_0 – витратна характеристика рівномірного руху.

Основною задачею теорії нерівномірного руху є побудова лінії вільної поверхні потоку для будь-яких конкретних форм русел.

Якщо глибина h зростає вниз за течією ($dh/dl > 0$), то лінія вільної поверхні являє собою криву підпору (рис. 2.6) і рух виявляється уповільненим. Якщо глибина зменшується ($dh/dl < 0$), то лінія вільної поверхні являє собою криву спаду і рух стає прискореним. Окремі випадки рівняння (2.24) для призматичних русел розглянуті в [2.4; 2.5].

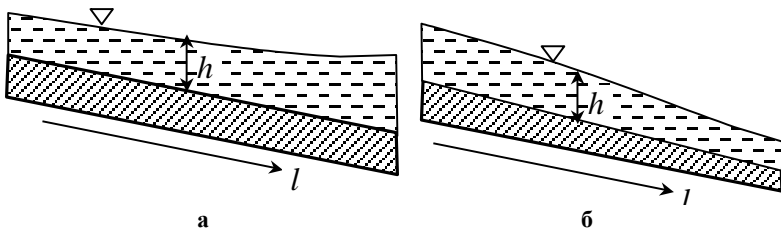


Рис. 2.6. Типи ліній вільної поверхні у відкритих руслах:

а) крива підпору; б) крива спаду

Для побудови кривих підпору і спаду можна скористатися методом, заснованим на рівнянні Бернуллі [2.4]. Русло ріки розбивається на ряд розрахункових ділянок з осередненими харак-

теристиками. Для кожного створу величини ω і R визначаються на базі натурних вимірів. Утрати напору між створами відповідно до формули Шезі визначаються як

$$h_w = I_g l = \frac{Q^2}{(\omega C \sqrt{R})_{cp}^2} l = \frac{Q^2}{K_{cp}^2} l. \quad (2.25)$$

Різниця напорів між двома створами, визначена з рівняння Бернуллі, складає

$$\Delta H_1 = H_1 - H_2 = \frac{\alpha_2 u_2^2 - \alpha_1 u_1^2}{2g} + \frac{Q^2 l}{((K_1 + K_2)/2)^2} \approx \frac{4Q^2 l}{(K_1 + K_2)^2}. \quad (2.26)$$

Тут було прийнято, що різницею швидкісних напорів можна знехувати у порівнянні з h_w . Визначивши методом послідовних наближень H для створу 1, можна аналогічним способом обчислити H і для розташованого вище створу, користуючись тими ж рівняннями.

Результатом розв'язання сформульованих задач буде визначення рівня вільної поверхні живого перетину потоку, витрати і середньої швидкості потоку на розрахунковій ділянці. Ці дані є вихідними при вирішенні задачі переносу забруднень у поверхневих водотоках.

2.5. НЕУСТАЛЕНА ТЕЧІЯ У ВІДКРИТИХ РУСЛАХ

При несталому русі води витрата, швидкість і інші характеристики змінюються за часом. Рівняння, що описує такий рух, може бути отримане на основі балансу сил, що діють на елемент струменя рідини (рис.2.7): 1) тиск на торцеві перетини $dP_1 = P d\omega$ і $dP_2 = (P + \partial P / \partial x dx) d\omega$ (ω – площа торцевого перерізу); 2) вага виділеного елемента рідини $dG = \rho g d\omega dx$; 3) сила опору з боку оточуючої елемент маси рідини $dF_c = \tau d\chi dx$ ($d\chi$ – периметр поперечного перерізу); 4) сила інерції маси dm елемента, що виявляється при зміні в часі швидкості течії $dF_i = dm \frac{du}{dt} = \rho d\omega dx \frac{du}{dt}$.

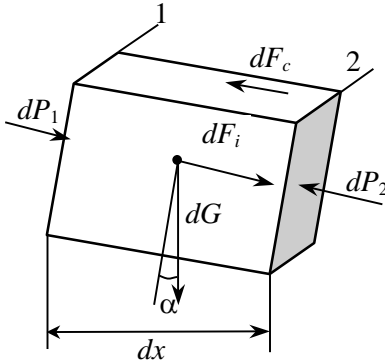


Рис. 2.7. Схема балансу сил в елементарному об'ємі відкритого русла

Проектуючи всі сили на напрямок руху (вісь Ox), одержимо рівняння динамічної рівноваги у вигляді:

$$dP_1 - dP_2 + dG \sin \alpha - \tau dx - \rho d\omega dx \frac{du}{dt} = 0. \quad (2.27)$$

Оскільки $dx \cdot \sin \alpha = -dz$, і

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} \end{aligned}$$

то, підставляючи в (2.27) вирази для всіх вхідних до нього сил, одержимо

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P}{\rho} \right) - g \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) - g \frac{\partial h_w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (2.28)$$

Якщо у виразі (2.7) прийняти, що гідравлічний радіус R приблизно дорівнює глибині h , то з урахуванням (2.18) рівняння (2.28) запишеться у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = g I_0 - g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{g u^2}{C^2 h}. \quad (2.29)$$

Зміна витрати Q при несталому русі буде поширюватися вздовж русла не миттєво, а з кінцевою швидкістю. Збільшення витрати dQ на ділянці русла довжиною dx між перетинами з координатами x та $x+dx$ за проміжок часу dt дорівнює

$$dQ = (Q|_x - Q|_{x+dx}) dt = u\omega|_x dt - u\omega|_{x+dx} dt = -\frac{\partial}{\partial x} (u\omega) dx dt.$$

Зміна витрати викличе зміну висоти, а отже, площі живого перетину на $d\omega = \partial\omega/\partial t dt$ і об'єму води на розглянутій ділянці $dW = d\omega dx$. Оскільки $dW = dQ$, то

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} dt dx = - \frac{\partial Q}{\partial x} dx dt,$$

відкіля

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \text{ чи } \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + \omega \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (2.30)$$

Отримане рівняння є рівнянням нерозривності. Для неглибоких потоків постійної ширини ($\omega = Bh$, $B = \text{const}$), рівняння (2.30) прийме вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (2.31)$$

Рівняння (2.29) і (2.31), які називають також рівняннями Сен-Венана, описують несталий рух води у відкритих руслах. За допомогою їхнього аналізу можна оцінити роль окремих чинників при основних видах несталої течії в ріках і водоймищах (табл. 2.3) [2.17].

Таблиця 2.3

Параметри несталої течії у відкритих водотоках

Характерний масштаб	Повеневі хвилі у великих ріках	Повеневі хвилі у водоймищах	Хвилі попусків ГЕС
Довжина L_x , м	10^5	$5 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^4$
Швидкість L_u , м/с	0.7	0.2	1.5
Глибина L_h , м	10	15	10
Зміна глибини під час проходження хвилі ΔL_h , м	7	3	5
Похило дна I_0	10^{-4}	$0.5 \cdot 10^{-4}$	10^{-4}
Коефіцієнт Шезі C , м/с	40	50	40
Інтервал часу L_t , с	$1.4 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^4$

Увівши до (2.29) і (2.31) заміну змінних $x = L_x \bar{x}$, $u = L_u \bar{u}$, $h = L_h \bar{h}$, і т. д., де символ з ризикою позначає безрозмірну величину, одержимо:

$$\frac{L_u}{L_t} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} \right) + \frac{L_u^2}{L_x} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right) = g I_0 - g \frac{L_h}{L_x} \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \right) - \frac{g L_u^2}{C^2 L_h} \left(\frac{\bar{u}^2}{\bar{h}} \right), \quad (2.32)$$

$$\frac{L_h}{L_t} \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + L_u \frac{L_h}{L_x} \left(-u \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} \right) + L_h \frac{L_u}{L_x} \left(\bar{h} \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0. \quad (2.33)$$

Унаслідок уведення характерних масштабів, узяті в дужки вирази повинні бути близькими до одиниці. Тому порядок величин окремих членів рівнянь визначається коефіцієнтами при дужках. У рівнянні (2.33) всі члени мають приблизно однаковий порядок. Оцінки для членів рівняння руху (2.32) приведені в табл. 2.4.

Таблиця 2.4

Характерні значення параметрів руху у відкритих водотоках

Вид руху	$\frac{L_u}{L_t}$	$\frac{L_u^2}{L_x}$	$g l_0$	$g \frac{\Delta L_h}{L_x}$	$\frac{g L_u^2}{C^2 L_h}$
Повеневі хвилі у великих ріках	$0.5 \cdot 10^{-5}$	$0.5 \cdot 10^{-5}$	$0.1 \cdot 10^{-2}$	$0.7 \cdot 10^{-2}$	$0.3 \cdot 10^{-3}$
Повеневі хвилі у водоймищах	$0.4 \cdot 10^{-4}$	$0.2 \cdot 10^{-5}$	$0.5 \cdot 10^{-3}$	$0.6 \cdot 10^{-3}$	$0.8 \cdot 10^{-5}$
Хвилі попусків ГЕС	$0.2 \cdot 10^{-4}$	$0.2 \cdot 10^{-4}$	$0.1 \cdot 10^{-2}$	$0.1 \cdot 10^{-2}$	$0.6 \cdot 10^{-3}$

2.6. МОДЕЛІ ХВИЛЬ У ПОВЕРХНЕВИХ ВОДОТОКАХ

Спрощені моделі хвиль у великих водних об'єктах можна одержати на основі лінеаризації рівнянь Сен-Венана [2.17; 2.27]. Припустимо, що вода тече в широкому каналі, а глибина і швидкість несталого потоку можуть бути представлені як

$$h(x, t) = h_0 + h_1(x, t), \quad u(x, t) = u_0 + u_1(x, t), \quad (2.34)$$

де h_0, u_0 – характеристики сталого режиму; h_1, u_1 – малі добавки. Тоді, підставляючи (2.34) до рівняння (2.29) і (2.31), зневажаючи членами другого порядку, одержимо

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + g \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{g u_0}{C^2 h_0} \left(2u_1 - \frac{u_0 h_1}{h_0} \right) = 0, \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial h_1}{\partial x} + h_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0. \quad (2.36)$$

Продиференціювавши рівняння (2.35) по x , і підставивши в нього значення $\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial t}$, $\frac{\partial u_1}{\partial x}$ з другого рівняння, одержимо

$$(gh_0 - u_0^2) \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} - 2u_0 \frac{\partial^2 h_1}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 h_1}{\partial t^2} - \frac{2gu_0}{C^2 h_0} \frac{\partial h_1}{\partial t} - \frac{3gu_0^2}{C^2 h_0} \frac{\partial h_1}{\partial x} = 0. \quad (2.37)$$

Вважаючи величини h_0 і u_0 відомими, співвідношення (2.37) можна розглядати як телеграфне рівняння відносно h_1 . При нульових початкових умовах і заданій функції $h_1(0, t)$ його розв'язок представляє собою суму двох членів: перший відповідає хвилі, що поширюється проти течії і дорівнює нулю при $x < t/(\sqrt{gh_0} - u_0)$, другий відповідає хвилі, котра поширюється вниз за течією і дорівнює нулю при $x > t/(\sqrt{gh_0} + u_0)$. Такі хвилі називаються динамічними. Їхня форма залежить від функції $h_1(0, t)$ і коефіцієнтів рівняння (2.37). Зворотна хвиля швидко згасає при дії сил опору і не становить інтересу для практики. Оскільки загальний вираз для другої хвилі досить громіздкий, розглянемо найбільш важливі окремі випадки.

Для хвиль у водоймищах під час повені можна зневажати силами опору в порівнянні з силами інерції; тоді (2.37) переходить у

$$(gh_0 - u_0^2) \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} - 2u_0 \frac{\partial^2 h_1}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 h_1}{\partial t^2} = 0. \quad (2.38)$$

Розв'язком (2.38) може бути хвиля довільної форми, що поширюється без зміни профілю в обидва боки від точки – місця збурення, тобто $h_1(x, y) = f(x - at)$. Підставивши таке співвідношення до рівняння (2.38), одержимо

$$(gh_0 - u_0^2) + 2u_0 a - a^2 = 0, \quad (2.39)$$

відкіля $a = u_0 \pm \sqrt{gh_0}$ (формула Лагранжа).

Для хвиль попусків ГЕС можна використовувати розв'язок у вигляді згасаючої хвилі

$$h_1(x, t) = e^{-kt} f(x - at), \quad (2.40)$$

яке можна застосувати для довільної функції f при $gh_0 = u_0^2$ (тобто для умов критичної течії). Тоді слід прийняти $a = u_0$, $k = 2g/C^2 h_0$. На рис. 2.7а зображена форма такої хвилі в різні моменти часу.

У руслах з великою заплавою сили опори переважають; рівняння (2.37) перетворюється на

$$\frac{gu_0}{C^2 h_0} \left(\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{3}{2} u_0 \frac{\partial h_1}{\partial x} \right) = 0. \quad (2.41)$$

Розв'язок (2.41) має форму хвилі постійної форми, що переміщується зі швидкістю $3/2u_0$, тобто $h_1(x, t) = f(x - 3/2u_0 t)$.

Для хвиль повені у великих ріках можна зневажати інерційними членами, тоді рівняння (2.37) зводиться до рівняння параболічного типу

$$\frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} = \frac{2u_0}{C^2 h_0^2} \left(\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{3}{2} u_0 \frac{\partial h_1}{\partial x} \right). \quad (2.42)$$

Розв'язок цього рівняння має вигляд хвилі, що розпливається, переміщуючись зі швидкістю $3u_0/2$. У випадку, якщо в початковому створі при ширині B миттєво скидається об'єм води W_0 , зміну глибини в руслі після цього можна описати формулою

$$h_1(x, t) = \frac{W_0}{2\sqrt{\pi D t B}} \exp\left(-\frac{(x - 3u_0 t/2)^2}{4Dt}\right), \quad D = \frac{C^2 h_0^2}{2u_0}. \quad (2.43)$$

При заданій зміні глибини у початковому створі $h_1(0, t) = \mu(t)$

$$h_1(x, t) = \frac{D}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{(x - 3u_0/2)}{D\sqrt{(t - \tau)^3}} \exp\left(-\frac{(x - 3u_0 t/2)^2}{4D(t - \tau)}\right) \mu(\tau) d\tau. \quad (2.44)$$

На рис. 2.7б показана форма хвилі у великій річці після миттєвого скидання води у початковому створі в різні моменти часу.

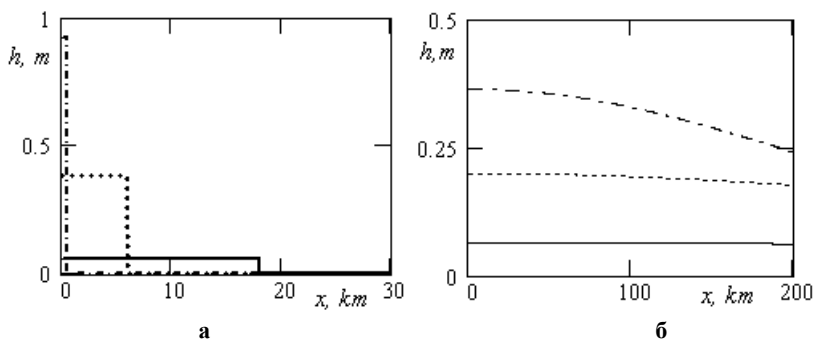


Рис. 2.7. Типи динамічних хвиль:
 а) спадаюча хвиля з чітким фронтом (2.40),
 б) хвиля з перехідною зоною (2.43)

Описані вище моделі відповідають динамічним хвилям, швидкість яких залежить від величини \sqrt{gh} . Основна частина паводка рухається зі швидкістю кінематичної хвилі, тобто в умовах рівноваги сили ваги і сил опору. У такому випадку

$$Q = K\sqrt{I_0} = f(\omega, x)\sqrt{I_0},$$

тобто витрата води в кожному створі однозначно пов'язана з площею живого перетину (рівнем води). З урахуванням рівняння нерозривності (2.30)

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0. \quad (2.45)$$

Рівняння (2.45) має систему характеристик

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial \omega} = c, \quad (2.46)$$

уздовж яких $Q = \text{const}$. Загальний розв'язок (2.45) має вигляд $Q(x-ct)$. Форма кінематичної хвилі змінюється в залежності від величини витрати Q : великі витрати рухаються з більшою швидкістю, ніж малі, фронт хвилі стає крутіше, тил більш пологим. В умовах сталої ширини русла можна записати [2.17]

$$\frac{\partial Q}{\partial \omega} = u + \omega \frac{\partial u}{\partial \omega} = u + \frac{1}{2} C \sqrt{h} = \frac{3u}{2}.$$

2.7. РІВНЯННЯ ПЕРЕНОСУ ДОМІШКИ У ВОДНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Рівняння переносу домішки у водному середовищі має такий же вигляд, як і для атмосфери (1.41), а саме [2.7; 2.8; 2.9]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} - u\varphi \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} - v\varphi \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} - (w - w_g)\varphi \right) - K_1\varphi + q = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

де φ – концентрація домішки; u , v , w – компоненти швидкості; D_x , D_y , D_z – коефіцієнти дифузії; q – інтенсивність джерел домішок; K_1 – коефіцієнт неконсервативності; w_g – швидкість гравітаційного осідання або гідравлічна крупність. У рівнянні (2.47) не враховано член $D_m \Delta \varphi$, оскільки турбулентний перенос домішки у водному потоці набагато більше молекулярного.

Поряд з теорією турбулентної дифузії, заснованої на припущеннях Бусинеска (1.37), розроблена також теорія дифузії зі скінченою швидкістю [2.8], що базується на властивостях характеристик турбулентного потоку. Однак для практичних розрахунків і прогнозу якості поверхневих вод використовується теорія турбулентної дифузії.

Як початкова умова при розв'язанні рівняння (2.47) задається розподіл домішки у водному об'єкті

$$\varphi|_{t=0} = \varphi_0(x, y, z). \quad (2.48)$$

Граничні умови в початковому перетині (в місці випуску стічних вод) часто задаються у вигляді:

$$\varphi = F(t). \quad (2.49)$$

Умова на граничній поверхні звичайно має вид

$$\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \beta \varphi = f(t), \quad (2.50)$$

де коефіцієнти α і β визначають інтенсивність надходження домішки до водойму (водотоку) з підземних вод і з атмосфери.

Для вирішення задач переносу домішки в мілкому водоймі осереднимо рівняння (2.47) за глибиною (рис. 2.8), прийнявши, що $\varphi = \varphi(x, y, t)$ і горизонтальні компоненти швидкості на рівні дна $z = -h$ дорівнюють нулю [2.9]:

$$\int_{-h}^{\xi} \frac{\partial u \varphi}{\partial x} dz = \frac{\partial u \varphi}{\partial x} (\xi + h) = \frac{\partial u \varphi (\xi + h)}{\partial x} - u \varphi \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

$$\int_{-h}^{\xi} \frac{\partial v \varphi}{\partial y} dz = \frac{\partial v \varphi}{\partial y} (\xi + h) = \frac{\partial v \varphi (\xi + h)}{\partial y} - v \varphi \frac{\partial \xi}{\partial y},$$

$$\int_{-h}^{\xi} \frac{\partial w \varphi}{\partial z} dz = w \varphi \Big|_{z=\xi} - w \varphi \Big|_{z=-h},$$

$$\int_{-h}^{\xi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dz = \frac{\partial \varphi}{\partial t} (\xi + h) = \frac{\partial \varphi (\xi + h)}{\partial t} - \varphi \frac{\partial \xi}{\partial t},$$

$$\int_{-h}^{\xi} \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dz = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) (\xi + h),$$

$$\int_{-h}^{\xi} \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dz = \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) (\xi + h),$$

$$\int_{-h}^{\xi} \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dz = D_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=\xi} - D_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=-h}.$$

Збираючи всі доданки, одержимо наступне рівняння

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (\xi + h) \varphi}{\partial t} + \frac{\partial (\xi + h) \varphi u}{\partial x} + \frac{\partial (\xi + h) \varphi v}{\partial y} + \\ & + \varphi \left(w - \frac{\partial \xi}{\partial t} - u \frac{\partial \xi}{\partial x} - v \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) - \varphi w_s = \left(D_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{\xi} - \left(D_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{-h} + \\ & + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right\} (\xi + h). \end{aligned} \quad (2.51)$$

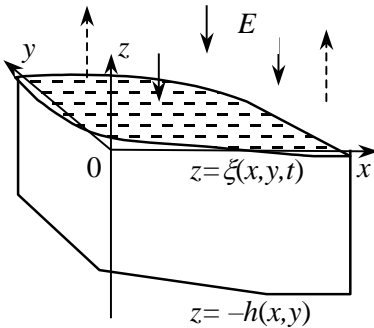


Рис. 2.8. Схема до виведення двовимірного рівняння переносу (в рамках теорії «мілкої» води)

Умова балансу маси речовини на поверхні води записується у вигляді:

$$\varphi \frac{\partial \xi}{\partial t} = -j_x \frac{\partial \xi}{\partial x} - j_y \frac{\partial \xi}{\partial y} + j_z + E\varphi_R, \quad (2.52)$$

де

$$\begin{aligned} j_x &= u\varphi - D_x \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ j_y &= v\varphi - D_y \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ j_z &= w\varphi - D_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{aligned} \quad (2.53)$$

являють собою масопотоки речовини вздовж осей координат, φ_R – концентрація речовини, що надходить на поверхню водойми; E – інтенсивність опадів (випару), мм/с. Підставляючи (2.53) у (2.52), і з огляду на кінематичну умову на вільній поверхні

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} - w + E = 0, \quad (2.54)$$

одержимо

$$D_z \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{\xi} = D_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + D_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} + E(\varphi_R - \varphi) \quad (2.55)$$

З урахуванням (2.55) рівняння (2.51) прийме остаточний вигляд [2.9]:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x (\xi + h) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y (\xi + h) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right\} + E(\varphi_R - \varphi) - \\ & - \varphi w_g - Q_h = (\xi + h) \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\}, \end{aligned} \quad (2.56)$$

де q_h – масопотік домішки через дно водойми.

Рівняння (2.56) є основним для моделювання переносу домішки у відкритих неглибоких водоймах і водотоках. Для роз-

чинних домішок можна прийняти, що швидкість осідання дорівнює нулю $w_g=0$.

2.8. ПАРАМЕТРИ РІВНЯННЯ ПЕРЕНОСУ ДОМІШОК У ПОВЕРХНЕВИХ ВОДАХ

Швидкість течії. Швидкість течії в слабозвивистих руслах при відсутності островів й інших особливостей може визначатися на основі одномірних моделей (розділи 2.4–2.6) або за натурними спостереженнями. Компоненти швидкості течії у водотоках зі складною формою границь і поперечного перерізу, як правило, розраховуються в результаті розв’язання рівнянь руху: або в рамках теорії «мілкої води» (попередній розділ), або за рівняннями Нав’є-Стокса.

Для безстічних водойм і водотоків з низькими швидкостями течії (наприклад, у водоймищах) більшого значення набувають вітрові, придонні течії та й течії уздовж берегів. Швидкість течії, викликаної вітром, можна визначити за формулою [2.7]

$$v_e = k(C)v_2\sqrt{3+10h},$$

де коефіцієнт k зростає від 0.1 до 0.68, коли коефіцієнт Шезі C змінюється від 10 до 100; v_2 – швидкість вітру на висоті 2 м; h – середня висота хвилі на даній ділянці. Швидкість течії на дні визначається за аналогічною формулою, в якій замість $k(C)$ використовується залежність $k'(C)$, причому k' змінюється від $0.39 \cdot 10^{-3}$ до $3.22 \cdot 10^{-3}$ при $10 < C < 100$.

Коефіцієнт дифузії. Переважна більшість формул для визначення коефіцієнта турбулентної дифузії отримана на основі лабораторних і натурних досліджень у різних умовах. Тому ці формули мають різну область застосування. Результати досліджень указують на істотну перевагу дифузії вздовж потоку над дифузиею в напрямку, поперечному потоку.

При інженерних розрахунках використовується коефіцієнт дисперсії – осереднений за живим перетином коефіцієнт дифузії. Таблиця 2.4 наводить формули для визначення коефіцієнтів подовжньої (D_x), поперечної горизонтальної (D_y) і вертикальної

дисперсій (D_z). Слід зазначити, що коефіцієнт поперечної дисперсії при наявності льодового покриття в 2–3 рази менше, ніж у відкритому руслі.

Таблиця 2.5.

Емпіричні формули для визначення коефіцієнта дисперсії [2.8]

Залежність		Примітка
1	$D_x = \frac{0.3(u_1^2)_{cp}}{Ru^*} l^2$	u_1 – відхилення локальної швидкості від середньої швидкості течії; l – відстань від місця максимальної поверхневої швидкості до найбільш віддаленого берега
2	$D_x = 21.3 \left(\frac{0.305u}{\ln(B/h)} \right)^{0.269}$	Рекомендується авторами для натурних умов
3	$\frac{D_x}{Ru^*} = \frac{3400}{\sqrt{Re}}$	Отримана в лабораторних умовах, рекомендується для гладких русел
4	$\frac{D_x}{Ru^*} = 16 \left(\frac{u}{u^*} \right)^{1.25}$	Отримана в натурних умовах
5	$\frac{D_y}{hu^*} = 0.24$	Отримана в лабораторних умовах
6	$D_y = \frac{uh}{3524} \left(\frac{B}{h} \right)^{1.378}$	Отримана на основі натурних досліджень
7	$D_y = 0.0218 \frac{u}{C} \sqrt{B} \sqrt{\frac{2g}{h}}$	Отримана на основі натурних досліджень, рекомендується для відстаней від місця скидання, більших $5h$
8	$\frac{D_y}{Ru^*} = \frac{41.6}{\sqrt{Re}}$	Отримана на основі натурних досліджень
9	$D_z = \frac{ghu}{48C}$	Рекомендується при $C \geq 60$
10	$\frac{D_z}{hu^*} = 0.0667$	Отримана в лабораторних умовах при малих h
11	$\lg \left(\frac{D_z}{v} \right) = -8.1 + 1.558 \lg \left(\frac{\rho uh}{\mu} \right)$	Отримана на основі натурних досліджень на великих ріках. Тут v і μ – відповідно кінематична та динамічна в'язкість, ρ – густина води

Примітка: u – середня швидкість потоку, $u^* = (gRI)^{0.5}$ – динамічна швидкість, C – коефіцієнт Шезі; h – глибина русла

Біохімічна трансформація. Швидкість біохімічного окислювання органічних сполук у поверхневих водах K_1 (діб⁻¹) залежить від температури і солоності води, наявності бактерій, ступеня розведення стічних вод. Значення K_1 змінюються в часі: експерименти в добре насичених киснем водоймах показали залежність типу $K_1 \sim t^{-\alpha}$, де $\alpha=0,54-0.6$. Однак через недостатню вивченість параметра K_1 при інженерних розрахунках він приймається постійним. У залежності від швидкості перетворення в поверхневих водах органічні речовини розділені на 3 групи (табл. 2.6). У залежності від складу стічних вод, швидкості течії в руслі, температури води коефіцієнт K_1 може коливатися від 0.001 до 2.1 діб⁻¹.

Таблиця 2.6

Коефіцієнти неконсервативності K_1 (діб⁻¹) деяких органічних забруднювачів (при 20 °С) [2.8]

«біологічно м'які», $K_1 > 0.3$ діб ⁻¹	«проміжна група», $K_1 = 0.05 \div 0.3$ діб ⁻¹	«біологічно жорсткі», $K_1 < 0.05$ діб ⁻¹
Формальдегід 1.4	Синтанол 0.22–0.3	Метілмеркаптан 0.05
Глюкоза 0.72	Адипінова кислота 0.18	Циклогексанон 0.05
Метилловий спирт 0.57	Пірокатехін 0.14	Діметилдісульфід 0.04
Фурфурол 0.55	Гваякол 0.12	Сірководень 0.03
Етиловий спирт 0.5	Різорцин 0.11	Капролактам 0.01
Оцтовий альдегід 0.49	Лігносульфати 0.06	Целюлоза 0.003–0.08
Фенол 0.38		Циклогексанол 0.001

Швидкість реаерації в моделі Стрітера-Фелпса (2.2) залежить як від діяльності водяних фітоорганізмів, так і від характеристик течії. Другий чинник краще піддається кількісному опису. Одна з емпіричних формул [2.8] має вигляд

$$K_2 = 4.96 v_x^{0.969} H^{-1.673}. \quad (2.58)$$

Для врахування температури параметр K_2 слід помножити на коефіцієнт $1.0241^{(T-20)}$, де T – температура, °С. Наближені оцінки дають інтенсивність надходження O_2 для великих рік 3.8 г/(м³·добу), для гірських рік – 6.2 г/(м³·добу) при $T=20$ °С.

2.9. МОДЕЛІ ПЕРЕНОСУ ДОМІШОК У ВОДОТОКАХ

Для довготермінових прогнозних оцінок забруднення поверхневих вод у першому наближенні доцільно використовувати спрощені методи. Наприклад, стаціонарний перенос домішок униз за течією в малій річці в умовах збільшення витрати за рахунок припливів і поверхневого стоку може бути описаний рівнянням

$$\frac{d(Q\varphi)}{dx} - \frac{K_1}{v_x} Q\varphi = 0, \quad (2.59)$$

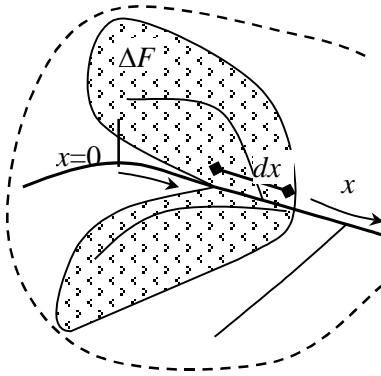


Рис. 2.9. Схема стаціонарного переносу в системі річок

де $Q(x) = v\omega(x) = Q_0 + \alpha(x)$; $\omega(x)$ – площа перетину русла; Q_0 – витрата ріки і стічних вод у початковому створі; $\alpha(x) \approx \Delta F \cdot M$ – збільшення витрати на ділянці довжиною x ; ΔF – збільшення площі водозбору; M – модуль стоку; інші позначення – попередні. На рис. 2.9 штриховою кривою позначена межа водозбору, заштрихованою фігурою – збільшення його площі на ділянці русла довжиною dx .

Позначивши як невідому функцію добуток $Q\varphi$, одержимо наступний вираз для розподілу концентрації домішки вздовж течії:

$$\varphi(x) = \frac{Q_0}{Q(x)} \varphi_0 e^{-k_1 x / v_x} + \varphi_r, \quad (2.60)$$

де φ_0 – концентрація домішки в суміші річкової і стічної вод у початковому створі ($x=0$); φ_r – концентрація в річковій воді вище створу $x=0$ і в притоках, що впадають у ріку нижче цього створу. В описаній схемі передбачається, що в початковому

створі відбувається повне перемішування річкової води зі стічними водами.

Для оперативних прогнозів переносу домішок у поверхневому водотоці доцільно використовувати аналітичні розв'язки рівняння (2.49). При їхньому виведенні використовуються такі припущення: 1) швидкістю течії в напрямку, поперечному потоку, можна зневажати; 2) дифузія вздовж потоку незначна в порівнянні з конвективним переносом, тобто $D_x=0$; 3) швидкість струменя стічних вод і основного потоку однакова; 4) час дифузії досить великий і задовольняє умові [2.9] $t > B/(Ru^*)$, де B – ширина русла.

Розглянемо одновимірні моделі, що можуть застосовуватися в умовах малих річок і при повному змішуванні стічних вод у створі випуску. При миттєвому випуску стічних вод масою M_0 у створі $x=0$ зміна концентрації з часом уздовж потоку може оцінюватися за допомогою формули

$$\varphi(x,t) = \frac{M_0}{2\omega\sqrt{\pi D_x t}} \exp\left(-\frac{(x-ut)^2}{4D_x t} - K_1 t\right). \quad (2.61)$$

Розподіл концентрації в річці після випуску стічних вод тривалістю τ може визначатися

$$\varphi(x,t) = \frac{\Phi_0}{2} \exp^{\frac{x(u-\lambda)}{2D_x}} \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x-ut}{2\sqrt{D_x t}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{x-ut_1}{2\sqrt{D_x t_1}}\right) \right]. \quad (2.62)$$

де $\lambda = \sqrt{u^2 + 4K_1 D_x}$, $t_1 = t - \tau$.

В умовах великої ріки необхідно враховувати нерівномірність розподілу домішки за площею перетину потоку, коли розміри джерела набагато менші ширини русла і гіпотеза про повне перемішування в створі випуску незастосовна. Тоді можуть використовуватися розв'язки, одержані з урахуванням поперечної дисперсії. Так, для двовимірного потоку стаціонарний розподіл домішки в руслі шириною B описується формулою [2.8]

$$\varphi(x, y) = \varphi_r + \frac{(\varphi_0 - \varphi_r)Q_0}{h\sqrt{\pi u D_y x}} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{(y + B/2 - B_s)^2 u}{4D_y x} - K_1 \frac{x}{u}\right)}{\operatorname{erf}\left(\frac{B\sqrt{u}}{2\sqrt{D_y x}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{(B - B_s)\sqrt{u}}{2\sqrt{D_y x}}\right)}, \quad (2.63)$$

де B_s – відстань від джерела випуску до берега; φ_0 – концентрація домішки в стічних водах; φ_r – у річковій воді; Q_0 – сумарна витрата ріки і стічних вод у початковому створі. Аналіз розв’язку (2.63) показує, що максимальна концентрація спадає пропорційно $x^{-1/2}$. Експериментальні дослідження показують, що це має місце після того, як струмінь стічних вод досягне обмежуючих поверхонь. У межах ділянки максимального розведення максимальна концентрація знижується швидше.

Основним недоліком описаних формул є те, що в них не враховується зміна перетину потоку вздовж течії, криволінійна форма границь, наявність островів, заток тощо. Ці фактори можуть бути враховані за допомогою чисельних алгоритмів [2.7; 2.9; 2.14; 2.27].

2.10. ПЕРЕНОС І ОСАДЖЕННЯ ЗАВИСЛИХ РЕЧОВИН У ПОВЕРХНЕВИХ ВОДАХ

Завислі речовини потрапляють до поверхневих вод у результаті зриву частинок потоком із дна русел, поверхневого стоку й осадження твердих частинок з повітря на водну поверхню. У дощових і талих водах, що стікають з міських територій і сільгоспугідь, часто містяться забруднюючі речовини (солі важких металів, нафтопродукти, органічні сполуки і т. ін.) у концентраціях, що перевищують гранично допустимі. Частина завислих речовин переноситься вниз за течією, частина осідає у вигляді донних відкладень. Ці процеси повинні враховуватися при прогнозі якості поверхневих вод.

Рівняння балансу завислих частинок на довільній ділянці русла має вигляд

$$Q_{поч} + Q_{біч} - Q_{від} - Q_{кін} = 0, \quad (2.64)$$

де $Q_{поч}$ і $Q_{кін}$ – витрати завислих частинок у початковому і кінцевому створах ділянки, $Q_{біч}$ – витрата з бічних припливів, $Q_{від}$ – витрата суспензій, що відкладаються на дні в межах ділянки.

Для виведення диференціального рівняння переносу завислих речовин в одновимірному нестационарному потоці виділимо паралелепіпед з основою $dx dy$ і висотою $h = z_n - z_0$ (різниця позначок поверхні z_n і дна z_0) (рис. 2.10). Нехай $\bar{\varphi}(x, t)$ – частка суспензій в об'ємі води, однакова за глибиною в рамках одновимірної моделі.

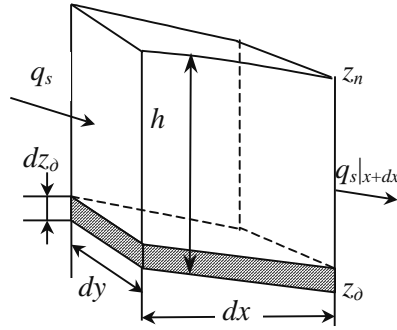


Рис. 2.10. Схема переносу наносів у відкритому руслі

Різниця питомої об'ємної витрати завислих частинок q_s за час dt дорівнює зміні за цей же час об'єму рухомих і відкладених наносів $(1-\varepsilon) dx dy dt$, тобто

$$-\frac{\partial q_s}{\partial x} dx dy dt = (1-\varepsilon) \frac{\partial z_n}{\partial t} dx dy dt + \frac{\partial(h\bar{\varphi})}{\partial t} dx dy dt, \quad (2.64)$$

де ε – пористість наносів. Звідси

$$\frac{\partial q_s}{\partial x} + (1-\varepsilon) \frac{\partial z_n}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{\varphi})}{\partial t} = 0. \quad (2.65)$$

В умовах рівнинних річок $\bar{\varphi} < 0.015$ [2.1], тому третій доданок у (2.65) можна відкинути через його малість. Для перетину в цілому рівняння (2.65) можна записати як

$$\frac{\partial Q_s}{\partial x} + (1-\varepsilon) \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0, \quad (2.66)$$

де $Q_s = \bar{\varphi} Q$ – витрата завислих частинок, m^3/s .

Зміна площі перетину ω визначається процесами осідання і зриву частинок із дна русла, тому можна припустити, що швид-

кість зміни площі перетину пропорційна різниці швидкості осадження і швидкості зриву частинок із дна русла

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \beta(w_g - E)\bar{\varphi}. \quad (2.67)$$

Параметр E (м/с), що характеризує процес зриву частинок із дна, залежить від швидкості течії, а значить, і від витрати в руслі Q . З урахуванням (2.67) приходимо до рівняння

$$\frac{dQ_s}{dx} + (1 - \varepsilon)\beta(w_g - E(Q))\bar{\varphi} = 0, \quad (2.68)$$

яке описує процес у стаціонарних умовах. Розв'язком (2.68), що враховує тільки осадження суспензій ($E(Q)=0$), може бути

$$\bar{\varphi}(x) = \bar{\varphi}_0 \exp(-(1 - \varepsilon)\beta w_g x / Q),$$

де $\bar{\varphi}_0$ – концентрація зважених частинок у створі $x=0$.

Процеси осадження суспензій у водоймищах різко підсилюються у порівнянні з ріками. Для балансових оцінок уводиться коефіцієнт водообміну K

$$K = \frac{W_{np}}{W_\varepsilon} = \frac{QT}{L\omega_{cp}} = \frac{v_{cp}\omega_{cp}T}{L\omega_{cp}} = \frac{v_{cp}T}{L}, \quad (2.69)$$

де W_{np} і W_ε – об'єм притоку і водоймища; Q – витрата води, що протікає за час T , L – довжина водоймища, ω_{cp} – середня площа його поперечного перерізу. З (2.69) можна визначити середньорічну проточність $V_{cp}=KL/T$, що для рівнинних водоймищ складає $1.3 \div 7.9$ см/с [2.3]. Здатність водоймищ акумулювати наноси залежить від проточності. Запропонована в [2.3] емпірична формула має вид

$$A = 99.6 - 2.32 V_{cp} (\%), \quad (2.70)$$

де A – акумулююча здатність, яка визначається як відсоток осілих наносів від їхнього загального надходження за певний період часу. Згідно (2.70), при $V_{cp}=42.9$ см/с має місце нульова акумуляція, що відповідає умовам рівнинних рік. Щорічно великі водоймища накопичують кілька мільйонів тонн завислих речовин.

Для розрахунку замулення водоймища з часом можна використувати балансову модель [2.1], засновану на припущенні, що об'єм замулювання dW за час t (у роках) пропорційний середньорічному стоку Q та густині зважених наносів ρ_n , тобто $\Delta W = \rho_n Q t / \bar{\rho}$ де $\bar{\rho}$ – відносна густина. Оскільки об'єм відкладень завжди пропорційний також вільному від наносів об'єму водосховища

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{\Delta W_0}{W_0},$$

де W_0 – об'єм водоймища відразу після його заповнення, m^3 , то

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{\rho_n Q \Delta t}{\bar{\rho} W_0}, \text{ або } \frac{dW}{W} = \frac{\rho_n Q dt}{\bar{\rho} W_0}. \quad (2.71)$$

Інтегруючи (2.71) та вводячи параметри W_t (об'єм відкладень за t років) та W_1 (те ж саме за один рік), можна одержати таку залежність

$$W_t = W_0 \left(1 - \left(1 - W_1 / W_0 \right)^t \right). \quad (2.72)$$

Параметр W_1 можна оцінити на підставі експериментальних даних та гідромеханічних характеристик наносів. Як приклад, на рис. 2.11 наведені графіки, які характеризують динаміку замулення водосховища, що характеризується параметром θ ($\theta = W_1 / W_0$). Навіть при малих θ через 40–50 років значний об'єм водоймища буде вже зайнятий відкладеннями.

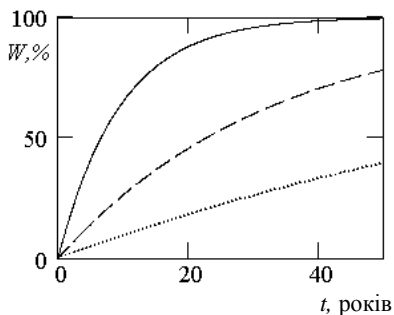


Рис. 2.11. Зростання об'єму відкладень у водосховищі
 — (θ=0.1), - - - (θ=0.03)
 (θ=0.01)

Площа замулення залежить від геологічних та гідромеханічних чинників і для великих водоймищ на р. Дніпро складала в 1979 р. від 40 до 80% від їхньої площі [2.3]. Швидкість накопичення мулу Δh (см/рік), оцінена на основі

обробки даних по 13 водоймищам на річках Дніпро та Волга, апроксимується рівнянням

$$\Delta h = 12 / (t + 0.8) + 0.07, \quad (2.73)$$

де t – час у роках.

Інтенсивність накопичення мулу нерівномірна вздовж русла і найбільша поблизу гребель. Величина Δh може досягати декількох десятків сантиметрів у перші роки після заповнення водоймища, поступово зменшуючись з часом.

У складі донних відкладень переважають піщаністі і глинисті мули. Через їхню високу сорбційну ємність концентрації важких металів і органічних забруднювачів у поверхневих водах суттєво зменшуються. Однак у ряді випадків (потрапляння до річок деяких речовин, цвітіння водойм) відбувається зворотний процес – перехід важких металів з донних відкладень у розчинну форму і погіршення якості води.

2.11. ДИФУЗІЯ ДОМІШОК У МОРСЬКОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Математичні моделі переносу та дифузії домішок використовуються при дослідженні процесів розповсюдження забруднюючих речовин у морській воді. Джерелами такого забруднення є аварії суден з вантажами нафти і токсичних речовин, аварії на нафтодобувних підприємствах у відкритому морі, осідання продуктів згорання та компонентів ракетного палива на поверхню води після запусків ракет-носіїв.

Найбільш вразливим з точки зору забруднення є поверхневий, так званий діяльний або активний шар океану, де внаслідок взаємодії з атмосферою найбільш активно точаться гідрологічні, гідрохімічні та біохімічні процеси. Для цього шару, товщина якого в середньому по Світовому океану складає 200–300 м, характерні сезонні коливання температури та солоності [2.26]. У верхній частині активного шару можна виділити майже однорідний прошарок, де вказані параметри практично не змінюються. Для нижньої частини цього шару, яку ще називають тер-

моклинном, характерні суттєві вертикальні градієнти температури та солоності. Зі збільшенням глибини ці параметри практично не змінюються, а їхні значення складають близько 5°C та 0.035% відповідно. Товщини двох частин активного шару змінюються залежно від пори року.

До основних параметрів, що описують стан океану, належать швидкість течії V , тиск P , температура T , солоність S та густина води ρ . Залежно від конкретних умов можуть застосовуватися такі моделі океану: 1) однорідна, згідно з якою $\rho \approx \text{const}$, 2) баротропна, в якій густина ρ змінюється з глибиною при збільшенні тиску, 3) бароклинна, згідно з якою густина залежить також і від температури та солоності $\rho = \rho(P, T, S)$. Для опису розповсюдження забруднень у поверхневому шарі океану може бути застосована модель однорідного середовища; якщо ж джерело забруднення знаходиться на значній глибині (наприклад, затонулий танкер), необхідно використовувати інші моделі.

Процес поширення домішок в океані визначається швидкістю течій, інтенсивністю турбулентного обміну, фізико-хімічними перетвореннями. Рівняння, що описує цей процес, формально співпадає з (2.47). Разом з тим, дифузія домішок у великих водних об'єктах має певні особливості. Згідно з результатами океанологічних досліджень, поверхневий шар океану є практично повністю турбулентним внаслідок хвилювання, гідродинамічної неусталеності течій, конвекції. При цьому інтенсивність турбулентного перемішування значно відрізняється в горизонтальному та вертикальному напрямках.

Інтенсивність перемішування вздовж вертикалі суттєво залежить від стратифікації поверхневого шару, в умовах якої більш важкі шари води розташовані нижче менш важких. Досить часто, хоча і нещодавго, такий розподіл порушується, що й спричиняє вертикальне переміщення окремих об'ємів води. Усталеність стратифікації визначається градієнтом густини морської води, тобто, архімедовою силою. Експериментальні дослідження, проведені в різних частинах Світового океану, дали значення коефіцієнта вертикальної дифузії від 0.04 до $35\text{ см}^2/\text{с}$, у середньому декілька $\text{см}^2/\text{с}$.

Інтенсивність турбулентного перемішування в горизонтальному напрямку залежить від масштабу процесу. Коефіцієнт дифузії, згідно з експериментальними дослідженнями, змінюється за часом, оскільки збільшується масштаб вихорів, які розсіюють домішки. Так, на підставі обробки даних багатьох дослідів було встановлено так званий «закон ступеня 4/3» [2.20], згідно з яким коефіцієнт горизонтальної дифузії D можна записати у вигляді

$$D(l) = k l^{4/3} f(l/H) \quad (2.74)$$

де k – коефіцієнт пропорційності, значення якого лежать у діапазоні від 0.008 до 0.025 см^{2/3}/с; l – відстань між частинками домішки або горизонтальний розмір області розсіювання; H – товщина шару перемішування або глибина спостереження; f – корегуюча функція, значення якої складають від одиниці до декількох одиниць. Оцінені за результатами дослідів значення коефіцієнта горизонтальної дифузії D сягають від 20 до 500 м²/с і більше. Слід зазначити, що в окремих випадках моделі зі сталим значенням D також можуть давати прийнятні результати.

Порівняння характерних значень D і D_z вказує на те, що швидкість поширення домішок у горизонтальному напрямку набагато перевищує швидкість їхнього поширення по вертикалі. Тому математичні моделі поширення домішок в океані часто базуються на припущенні щодо суто горизонтального переносу у поверхневому шарі, де шуканою величиною є осереднена за глибиною концентрація φ .

Розглянемо модель миттєвого викиду та подальшого розсіювання домішки масою M у момент часу $t=0$ у точці $(x=0, y=0)$. Для спрощення подальшого аналізу можна в двовимірному рівнянні

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} - u\varphi \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} - v\varphi \right) - K_1 \varphi \quad (2.75)$$

зробити заміну змінних

$$\xi = x - ut, \quad \eta = y - vt,$$

та перейти до лагранжевих координат (ξ, η) . З урахуванням залежності (2.74) рівняння (2.75) запишеться в циліндричних координатах у вигляді

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(kr^{4/3}(\xi, \eta) \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(kr^{4/3}(\xi, \eta) \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) - K_1 \varphi, \quad (2.76)$$

де $r(\xi, \eta) = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ – радіус вектор. Тут вважається, що $f=1$. Записуючи (2.76) в полярних координатах, одержимо

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r r^{4/3} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - K_1 \varphi. \quad (2.77)$$

Уводячи заміну $r^{1/3} = \zeta$, переходимо до рівняння

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{k}{9} \left(\zeta \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} \right) - K_1 \varphi. \quad (2.78)$$

Розв'язок (2.78) за умов сталості компонент швидкості u та v , який описує розподіл концентрації домішки в поверхневому шарі океану в момент t , має вигляд

$$\varphi(x, y, t) = \frac{M}{6\pi(4k/9)t^3} \exp \left(- \frac{\sqrt[3]{(x-ut)^2 + (y-vt)^2}}{4kt/9} - K_1 t \right). \quad (2.79)$$

Дифузія нейтральної домішки ($K_1=0$) від неперервного точкового викиду інтенсивністю q , розташованого в точці $(x=0, y=0)$, може бути описана рівнянням

$$u \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(D(y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + q \delta(x, y), \quad (2.80)$$

в якому знехтувано дифузійною в поперечному до потоку напрямку. Розв'язком (2.80) є [2.20]

$$\varphi(x, y, t) = \frac{4q}{6u\sqrt{\pi}(4kx/9u)^{3/2}} \exp \left(- \frac{y^{2/3}}{4kx/9u} \right). \quad (2.81)$$

Вирази (2.79) та (2.81) суттєво відрізняються від розв'язків рівняння дифузії зі сталими коефіцієнтами (рис. 2.12). Так, вони

дають набагато швидше падіння концентрації в центрі плями (пропорційно третьої ступені часу t , а не першого ступеня, як для розв'язку рівняння зі сталими коефіцієнтами). Разом з тим зменшення концентрації на віддаленні від центру плями відбувається повільніше (показник експоненти пропорційний $r^{2/3}$, тоді як для рівняння зі сталим коефіцієнтом дифузії він пропорційний r^2).

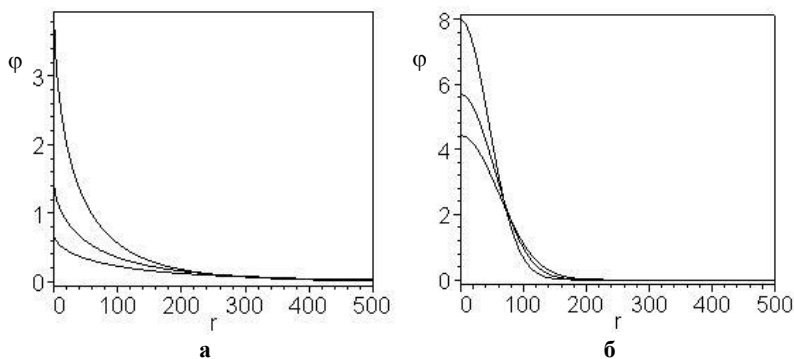


Рис. 2.12. Розподіл концентрації ϕ у різні моменти часу після миттєвого викиду в точці $r=0$ (відстань r в метрах):
 а) модель зі зміною D у часі; б) модель дифузії зі сталим коефіцієнтом D

ПИТАННЯ ТА ВПРАВИ ДО РОЗДІЛУ

1. Визначити критичну швидкість u_{cr} та швидкість осадження w_g для частинок розміром 0.5 та 2 мм для ламінарного та турбулентного режимів течії.
2. Чим відрізняється один від одного різні типи відкладання насосів у руслах?
3. Якими параметрами характеризується стік води в річках?
4. Які параметри використовуються для оцінки ступеня забруднення поверхневих вод органічними забруднювачами?
5. Що таке гідравлічний похил? Коли він співпадає з похилом дна та вільної поверхні?

6. Визначити параметри потоку для русел з напівкруглим та напівеліптичним поперечним перетином.
7. Що визначає витратна характеристика K ?
8. Як змінюється швидкість у поперечному перетині потоку?
9. У чому полягає різниця між руслами призматичного та непризматичного поперечного перетину? Як при цьому змінюється рівняння нерівномірного усталеного руху?
10. Які з параметрів рівнянь Сен-Венана найбільш важливі за таких умов: а) водосховищ, б) широких русел, в) великих річок (табл. 2.3–2.4)?
11. У чому полягають особливості різних типів паводкових хвиль?
12. Чим відрізняються динамічні та кінематичні хвилі?
13. Які умови формулюються на межах потоку в руслі в рамках моделі «мілкої води»?
14. Які характерні значення швидкості течії, коефіцієнта Шезі, та коефіцієнтів дифузії і неконсервативності для умов малих річок, великих водоймищ, великих річок?
15. Дати класифікацію математичних моделей переносу домішок у відкритих руслах.
16. Чому можна зневажати об'ємом рухомих насосів у рівнянні (2.65)?
17. Які джерела надходження зважених речовин до поверхневих вод?
18. Якими параметрами характеризується процес замулювання дна відкритих русел?
19. Дати характеристику простіших моделей замулювання.
20. Які особливості має дифузія домішок у морському середовищі?

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна

- 2.1. **Барышников Н. Б., Попов И. В.** Динамика русловых потоков и русловые процессы. Л.: Гидрометеиздат, 1988. 342 с.
- 2.2. Гидротехнические сооружения / Г. В. Железняков, Ю. А. Ибадзаде, П. Л. Иванов и др. М.: Стройиздат, 1983. 543 с.
- 2.3. Донные отложения водохранилищ и их влияние на качество воды / А. И. Денисова, Е. П. Нахимова, Б. И. Новиков, А. К. Рябов. К.: Наук. думка. 1987, 164 с.
- 2.4. **Киселев П. Г.** Гидравлика: основы механики жидкости. Учеб. пособие для вузов. М.: Энергия, 1980. 360 с.
- 2.5. **Константинов Н. М., Петров И. А., Высоцкий Л. И.** Гидравлика, гидрология, гидрометрия / Учеб. для вузов. М.: Высш. шк., 1987. Ч. 2, 431 с.
- 2.6. **Літовченко О. Ф.** Інженерна гідрологія та регулювання стоку. К.: Вища шк., 1999. 360 с.
- 2.7. Методические основы оценки и регламентирования антропогенного влияния на качество поверхностных вод. Л.: Гидрометеиздат, 1987. 275 с.
- 2.8. Основы прогнозирования качества поверхностных вод / Л. Н. Фильковская, В. С. Каминский, Л. Л. Пааль, И. Ф. Грибовская. М.: Наука, 1982, 181 с.
- 2.9. **Хубларян М. Г.** Водные потоки: модели течения и качества вод суши. М.: Наука, 1991. 192 с.

Додаткова

- 2.10. **Владимиров А. М.** Гидрологические расчеты. Л.: Гидрометеиздат, 1990. 364 с.
- 2.11. **Владимиров А. М., Дружинин В. С.** Сборник задач и упражнений по гидрологическим расчетам. СПб.: Гидрометеиздат, 1992. 208 с.
- 2.12. **Дружинин Н. И., Шишкин А. И.** Математическое моделирование и прогнозирование загрязнения поверхностных вод. Л.: Гидрометеиздат, 1989. 389 с.
- 2.13. Запорожское (Днепровское) водохранилище. Д.: Изд-во Днепропетр. ун-та, 2000. 172 с.

- 2.14. **Згуровский М. З., Скопецкий В. В., Хрущ В. К., Беляев Н. Н.** Численное моделирование распространения загрязнений в окружающей среде. К.: Наук. думка, 1997. 368 с.
- 2.15. **Каменсков Ю. И.** Руслвые и пойменные процессы. Томск: Изд-во Томского ун-та, 1987. 170 с.
- 2.16. **Корень В. И.** Математические модели в прогнозах речного стока. Л.: Гидрометеиздат, 1991. 110 с.
- 2.17. **Кучмент Л. С.** Основные упрощенные модели трансформации паводочных волн // Тр. Гидрометеоцентра СССР, Вып. 81, Гидрометеиздат, 1972. С. 55–65.
- 2.18. **Литовченко А. Ф., Сорокин В. Г.** Гидрология и гидрометрия. Практикум. К.: Вища шк., 1987. 166 с.
- 2.19. **Мокін В. Б., Мокін Б. І.** Математичні моделі та програми оцінювання якості річкових вод. Вінниця: Універсум, 2000. 152 с.
- 2.20. **Озмидов Р. В.** Горизонтальная турбулентность и турбулентный обмен в океане. М.: Наука, 1968. 200 с.
- 2.21. **Овчаров Е. Е., Захаровская Н. Н.** Гидрология и гидрометрия. Л.: Гидрометеиздат, 1986. 312 с.
- 2.22. **Прозоров И. В., Николадзе Г. И., Минаев А. В.** Гидравлика, водоснабжение и канализация. Учеб. пособие для строит. вузов. М.: Наука, 1979. 208 с.
- 2.23. **Родзиллер И. Д.** Прогноз качества воды водоемов – приемников сточных вод. М.: Стройиздат, 1984. 263 с.
- 2.24. **Синельников В. Е.** Механизм самоочищения водоемов. М.: Стройиздат, 1980. 200 с.
- 2.25. Справочник по гидрохимии / Под ред. А. М. Никанорова Л.: Гидрометеиздат, 1989. 392 с.
- 2.26. Физика океана / Под ред. Ю. П. Доронина. Л.: Гидрометеиздат, 1978. 294 с.
- 2.27. **Эббот М. Б.** Гидравлика открытого потока. М.: Энергоатомиздат, 1983. 272 с.

3. ФІЛЬТРАЦІЯ І МАСОПЕРЕНОС У ПІДЗЕМНИХ ВОДАХ

3.1. ФІЗИЧНА І ГЕОМЕТРИЧНА ХАРАКТЕРИСТИКА ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩ. ПІДЗЕМНІ ВОДИ

Пористе середовище являє собою тверде тіло, що містить порожнини (пори, тріщини), розміри яких значно менші розмірів самого тіла. Об'ємна пористість n дорівнює відношенню сумарного об'єму порожнин W_0 до загального об'єму W : $n=W_0/W$. Вагова пористість n_g визначається як відношення маси води, що міститься в порожнинах M_g , до маси твердої фази M_s : $n_g=M_g/M_s$. Коефіцієнт пористості k_p визначається як відношення об'єму порожнин W_0 до об'єму твердої фази W_s : $k_p=W_0/W_s$; при цьому k_p може бути більше 1, тоді як завжди $n<1$. На практиці використовують параметр об'ємної пористості, яка змінюється від 0,1–0,2% для тріщинуватих порід (граніти) до 40–52% для пухких порід (суглинки, глини).

За розміром пор виділяють: 1) надкапілярні (із середнім діаметром $d>0,5$ мм), 2) капілярні ($d=0,0002\div 0,5$ мм); 3) субкапілярні ($d<0,0002$ мм). У порах малого діаметра («застійних порах») рух рідини уповільнений або відсутній. Фактично він відбувається в активних (проточних) порах. Активна пористість n_a визначається як відношення об'єму активних пор W_a до всього об'єму W : $n_a=W_a/W$. Різниця $n-n_a\geq 0$ характеризує зміст зв'язаної води у поровому просторі.

Гранулометричний склад пористих середовищ характеризує процентний (за масою чи за об'ємом) вміст у ґрунті різних по величині частинок: великих уламків, піщаних, пилуватих, глинистих. Розмір, менше якого в ґрунті міститься 10% усіх частинок, називається ефективним (діючим) діаметром і позначається d_{10} (d_e). Аналогічно визначається діаметр d_{60} , менше якого в ґрунті 60% маси всіх частинок. Відношення $\zeta=d_{60}/d_{10}$ являє со-

бою коефіцієнт неоднорідності механічного складу ґрунту. Чим більше ζ , тим більше неоднорідний ґрунт. При $\zeta < 5$ ґрунт можна вважати однорідним. Як приклад, на рис. 3.1 зображені криві гранулометричного складу двох зразків піску різної зернистості.

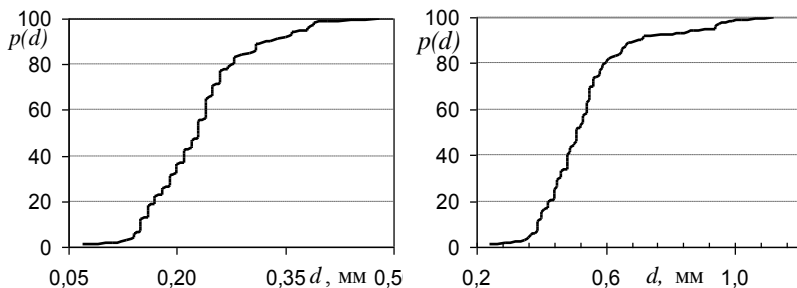


Рис. 3.1. Гранулометричний склад двох зразків пористого середовища ($p(d)$ – процентний вміст частинок, розмір яких не перевищує d)

Відомі теоретичні моделі [3.11] ідеального ґрунту Козені та модель фіктивного ґрунту Сліхтера можуть бути застосовані тільки для однорідних середовищ, що складаються з частинок одного розміру. Для фільтраційних розрахунків у реальних пористих середовищах, що містять частинки різних розмірів, необхідно вибирати ефективний розмір, при якому опір потоку у фіктивно однорідному ґрунті дорівнює опору потоку в реальному ґрунті. Для цього найбільш часто використовується величина d_{10} [3.10].

Пористе середовище характеризується також звивистістю – відношенням довжини траєкторії частинки, що рухається, до її проекції, що приблизно дорівнює 1,5. Важливим параметром є і питома поверхня – відношення сумарної поверхні всіх частинок до займаного ними об'єму. Приміром, в 1 м^3 сумарна площа поверхні піщин складає 10000 м^2 , для глин ця величина ще більша [3.6]. Внаслідок такої площі дотику рідини зі скелетом ґрунту опір руху рідини дуже великий.

Ступінь заповнення порового простору водою характеризується вологістю, а здатність ґрунтів уміщати в порах і утримувати воду – вологоємністю. Об'ємна вологість θ_v дорівнює відношенню об'єму, займаного водою в порожнинах, до всього

об'єму породи; вагова вологість θ_g – відношенню маси води до маси породи після сушіння при 105–110° С. Відносна вологість $\bar{\theta} = \theta_v / \theta_{max}$, де θ_{max} – повна вологоємність (максимальна при даній пористості). При $\bar{\theta} = 1$ усі порожнини заповнені водою. Зміна $\bar{\theta}$ може йти як у бік збільшення, так і зменшення. При збільшенні вологості необхідно знати коефіцієнт дефіциту насичення $\mu_s = n - \theta_v$; при зменшенні – коефіцієнт водовіддачі $\mu_w = n - \theta_m$, що характеризує здатність ґрунту віддавати воду під дією сили ваги (тут θ_m – максимальна молекулярна вологоємність). Значення μ_s складають від 0,001–0,005 для тріщинуватих порід до 0,2–0,35 для пористих грубозернистих ґрунтів.

При незначних змінах тиску води й об'ємів порід на невеликих глибинах пористе середовище можна вважати недеформованим, а геометрію порового простору – незмінною. Такий режим фільтрації називається жорстким. При великому тиску води на значних глибинах необхідно враховувати стисливість води і скелета ґрунту, що особливо важливо при фільтрації нафти і газу. Це пружний режим фільтрації, який можна описувати за допомогою параметрів об'ємної пружності підземних вод і ґрунту.

Зміна об'єму підземних вод у великому діапазоні зміни тиску може бути описана законом Гука

$$\beta_f = - \frac{1}{W_f} \frac{dW_f}{dP}, \quad (3.1)$$

де W_f – об'єм рідини, що відповідає тиску P , β_f – коефіцієнт об'ємної пружності рідини. Зміна об'єму пор при зміні тиску також може бути описана законом Гука у вигляді

$$\beta_s = - \frac{1}{W_s} \frac{dW_s}{dP}, \quad (3.2)$$

де dW_s – зміна об'єму пор у ґрунті з об'ємом пор W_s при зміні тиску на dP , β_s – коефіцієнт об'ємної пружності твердої фази. Згідно з експериментальними даними [3.12] $\beta_f = (2,7 \div 5) \cdot 10^{-5} \text{ атм}^{-1}$, $\beta_s = (0,3 \div 2) \cdot 10^{-5} \text{ атм}^{-1}$, тобто $\beta_f > \beta_s$. Коефіцієнт пружноємності

$\beta^* = n\beta_f + \beta_s$ комплексно враховує пружні властивості водонасиченого пористого середовища. Пружні властивості можуть проявлятися і при відносно невеликому тиску, викликаючи, наприклад, осідання ґрунтів при насиченні, набрякання глин тощо.

Мінливість властивостей пористого середовища характеризується її неоднорідністю. Розрізняються такі види неоднорідності: 1) хаотична (невпорядкована), 2) анізотропія (істотне розходження проникності у вертикальному і горизонтальному напрямках), 3) шарувата неоднорідність, 4) планова неоднорідність (наявність окремих слабопроникних включень).

Під водоносним шаром розуміється пориста водопровідна товща порід, яка майже цілком насичена водою (рис. 3.2). Точки, в яких підземна вода знаходиться під тиском, що дорівнює атмосферному, визначають вільну поверхню. Якщо ця поверхня обмежує зверху водоносний шар, вона називається рівнем підземних вод.

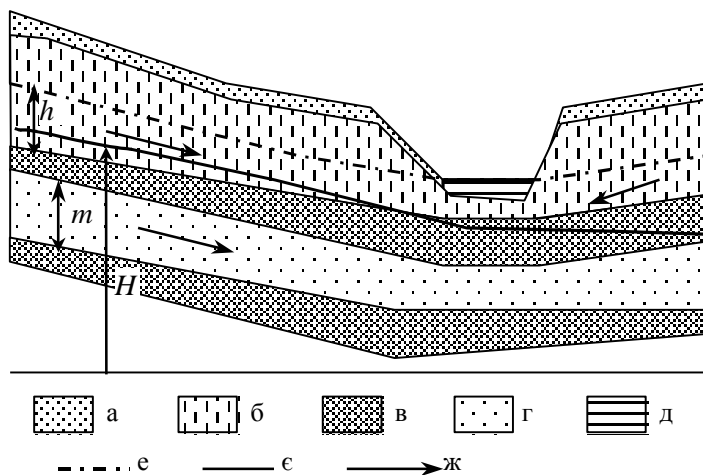


Рис. 3.2. Схематизація течій підземних вод:

h – глибина потоку ґрунтових вод, m – товщина напірного водоносного шару, H – його напір; а) верхній шар ґрунту, б) породи верхнього водоносного шару, в) слабопроникний прошарок, г) добре проникливий водоносний шар, д) поверхневий водотік (водойма), е) рівень ґрунтових вод, є) напір підземних вод, ж) напрямок течії підземних вод

Водоносний шар обмежений зверху і знизу або слабопроникними породами, або вільною поверхнею. Якщо водоносний шар має непроникну основу і вільну поверхню, він називається безнапірним. Шар порід, що знаходиться в межах водоносного об'єкту, називається зоною насичення; вище його розташована зона аерації (неповного насичення), хоча деякі її ділянки можуть бути цілком насиченими. Вода в ненасиченій зоні називається підвішеною. Безпосередньо над поверхнею підземних вод знаходиться капілярна кайма. Розподіл вологи поблизу поверхні землі не залежить від водоносного шару, якщо рівень води в ньому знаходиться на досить великій глибині.

Водоносний шар, обмежений з покриття і підшви відносно непроникними породами і майже цілком насичений водою, яка знаходиться під тиском вище атмосферного, називається напірним (артезіанським). Через слабопроникні обмежуючі прошарки може відбуватися значний перетік води в сусідні водоносні шари. Вище вільної поверхні можуть утворюватися тимчасові скупчення ґрунтових вод, такі, як підвішені води над прошарками глини.

3.2. МОДЕЛЬ СУЦІЛЬНОГО ФІЛЬТРАЦІЙНОГО ПОТОКУ. ЗАКОН ДАРСІ

Розподіл швидкостей у поровому просторі, особливо для неоднорідних середовищ, визначити практично неможливо. При вирішенні практичних задач, однак, достатньо знати лише витрати, швидкості і тиски рідини в межах малих об'єктів, які в той же час значно більші розмірів пор. Для цього можна використовувати модель суцільного фільтраційного потоку, в якій передбачається, що рідина рухається, заповнюючи весь простір: і пори, і частинки ґрунту [3.5; 3.11]. Таким чином, реальний потік рідини замінюється її фіктивним фільтраційним потоком, який повністю заповнює весь об'єкт. Під частинкою рідини в моделі суцільного потоку розуміється скупчення молекул розміром менше окремої пори.

Основними характеристиками фільтраційного потоку є швидкість потоку і витрата рідини. Швидкість потоку (швидкість фільтрації) V дорівнює $dQ/d\omega$, де dQ – дійсна витрата рідини через поперечний переріз потоку площею $d\omega$. Фактично рідина рухається тільки через площу перетину $nd\omega$. Дійсна швидкість (середня швидкість рідини в порах) V^* складає $dQ/nd\omega$, при цьому завжди $V^* > V$.

Лінія току фільтраційного потоку є лінією, дотична до якої в кожній точці збігається з напрямком швидкості фільтрації. Поверхня у фільтраційному потоці, де всі лінії току перетинаються ортогонально, утворює живий перетин фільтраційного потоку. Траєкторія частинок рідини являє собою лінію, утворену частинкою при русі. При несталому русі траєкторія частинок рідини відрізняється від лінії току.

У статичних умовах у кожній точці на вертикалі виконується співвідношення

$$H = \frac{P}{\rho g} + z = \text{const}, \quad (3.3)$$

де H – п'єзометричний напір, м; P – гідростатичний тиск (фактично різниця між тиском води та атмосферним тиском), Па; $P/\rho g$ – п'єзометрична висота (висота тиску); z – перевищення точки, в якій вимірюється напір, над площиною порівняння.

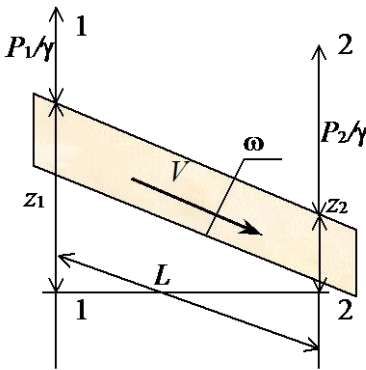
Із (3.3) випливає, що P зменшується з висотою z . На вільній поверхні, де тиск води дорівнює атмосферному тиску, а також на ділянці витікання підземних вод через поверхню землі виконується умова $P=0$. У зоні неповного насичення $P < 0$, при цьому частина пор заповнена повітрям. Однак навіть насичений ґрунт містить затиснені пухирці повітря, а сама вода – також і розчинене повітря. Суміш води з пухирцями поводить себе як стислива рідина, а на її стан впливають температура і тиск відповідно до законів реальних газів, а також розчинність повітря.

Основний закон фільтрації, встановлений французьким інженером Дарсі в 1855 р., пов'язує витрату рідини з різницею напорів у фільтраційному потоці. Закон збереження енергії струменя (рівняння Бернуллі) записується у вигляді

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H, \quad (3.4)$$

де $V^2/2g$ – швидкісний напір. Для переважної більшості фільтраційних потоків швидкість V не перевищує декількох міліметрів у секунду, внаслідок чого швидкісним напором для них можна знехтувати і розглядати рівняння (3.3). Закон Дарсі встановлює, що витрата рідини Q між поперечними перерізами 1–1 і 2–2 (рис. 3.3) лінійно залежить від втрати напору $\Delta H = H_1 - H_2$ на даній ділянці

$$Q = K\omega \frac{\Delta H}{L} = K\omega I, \quad (3.5)$$



де $I = (H_1 - H_2)/L$ – градієнт (падіння) напору, K – коефіцієнт фільтрації, який залежить від властивостей рідини і пористого середовища. Оскільки $V = Q/\omega$, то $V = KI$. У фільтраційному потоці, що описується законом Дарсі, сили опору (сили в'язкості) переважають над силами інерції. У диференціальній формі закон має вигляд

Рис. 3.3. Схема фільтраційної течії (до закону Дарсі)

$$\mathbf{V} = -K \text{grad} H. \quad (3.6)$$

Закон Дарсі справедливий при числах Рейнольдса $Re = Kd_e I/\nu$, (ν – кінематична в'язкість), які не перевищують $1 \div 10$ [3.5; 3.11], що виконується для більшості фільтраційних потоків.

При малих Re рух рідини починається з деякого ненульового значення градієнта напору $I_0 > 0$, хоча слабка течія вже має місце при $I < I_0$ (рис. 3.4, а). Явище початкового градієнта характерне для глинистих ґрунтів за рахунок високого гідравлічного опору в тонких капілярах. Відомо кілька співвідношень між швидкістю і градієнтом при малих числах Рейнольдса, що враховують I_0 [3.2], наприклад $V = K(I - I_0)$.

При $Re < 100$ фільтраційний потік ламінарний, після $Re > 150$ він стає турбулентним (рис. 3.4, б). Залежність між швидкістю V і градієнтом I перестає бути лінійною, хоча різкого переходу до турбулентного режиму не спостерігається. Найкраще наближення до закону Дарсі при великих числах Рейнольдса дає формула Дюпюї-Форхгеймера.

$$I = wV + bV^2,$$

де w – гідравлічний опір пористого середовища, $w \sim K^{-1}$. При $Re < 1$ параметром b можна зневажати.

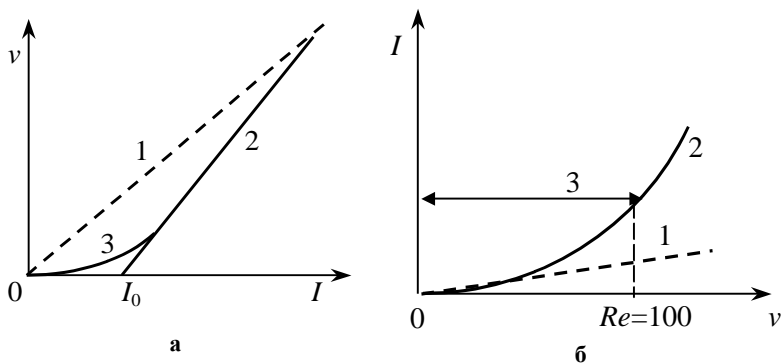


Рис. 3.4. Відхилення від закону Дарсі:

а) при малих Re (1 – закон Дарсі, 2 – апроксимація з урахуванням початкового градієнта, 3 – загальна залежність); б) при великих Re (1 – закон Дарсі, 2 – залежність Дюпюї-Форхгеймера, 3 – область ламінарного режиму)

Коефіцієнт фільтрації K визначається за формулою

$$K = \frac{\kappa \gamma}{\mu} = \frac{\kappa g}{\nu}, \quad (3.7)$$

де μ і ν – динамічна і кінематична в'язкість; ρ – щільність рідини; κ – проникність середовища. Величина K змінюється від 10^{-9} м/с для щільних глин до 10^{-1} м/с для порід з великих уламків. Коефіцієнт κ залежить головним чином від пористості та внутрішньої структури середовища і може бути визначений за допомогою формули [3.5; 3.10] $\kappa = d_e^2 f(n) f_K f_C$, де $f(n) = n^3 / (1-n)^2$ (формула Кармана), f_K – коефіцієнт форми зерен Козені

($1/110 < f_k < 1/60$), $f_c \approx 0,4$ – коефіцієнт звивистості Кармана. Коефіцієнт фільтрації зростає зі збільшенням температури внаслідок зменшення в'язкості.

Для визначення K на основі пористості та гранулометричного складу запропоновано багато формул; деякі з них наведені в табл. 3.1.

Таблиця 3.1.

Емпіричні формули для визначення коефіцієнта фільтрації K (значення K в м/добу) [3.33]

№	Автор	Формула	Пояснення
1	Хазен	$K = cd_{10}^2(0.7 + 0.03T)$	c – емпіричний коефіцієнт, що змінюється від 400 для глинистого піску до 1200 для чистого піску; T – температура, °С. Формула застосовна при $0.1 \text{ мм} < d_{10} < 3 \text{ мм}$
2	Крюгер	$K_{10} = \frac{322n}{(1-n)^2} d_q^2,$ $d_q = \frac{100}{\sum_{i=1}^N g_i/d_i}$	N – число фракцій гранулометричного складу; d_i – діаметр їхніх частинок, мм; g_i – частка i -ї фракції в складі породи, %; n – пористість у долях одиниці; d_q – діючий діаметр; K_{10} – коефіцієнт фільтрації при 10 °С. Формула найкраще застосовна для середньозернистих пісків
3	Цункер	$K_0 = \frac{cn^2}{(1-n)^2} \frac{(1+0.034T)}{s^2},$ $s = \frac{3g_2}{2d_1} + \sum_{i=2}^N \frac{g_i}{\ln d_i - \ln d_{i-1}} \left(\frac{1}{d_{i-1}} - \frac{1}{d_i} \right)$	K_0 – коефіцієнт фільтрації при 0° С, s – «питома поверхня» (відношення сумарної поверхні частинок породи до її сумарної поверхні, складеної частинками діаметром 1 мм); емпіричний коефіцієнт c змінюється від 340 для невідсортованого піску до 1160 для рівнозернистого піску з округлими частинками; інші позначення ті ж, що й у попередніх формулах. Формула застосовна для середньо- та дрібнозернистих пісків

3.3. РІВНЯННЯ НАПІРНОГО ПОТОКУ

Розглянемо елементарний паралелепіпед з ребрами, паралельними координатним осям (рис. 3.5) [3.5]. Об'єм рідини в паралелепіпеді $ndxdydz$, її маса $\rho ndxdydz$.

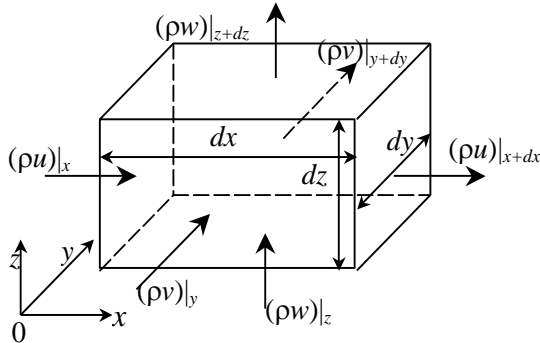


Рис. 3.5. Елементарний об'єм (до виведення рівняння нерозривності)

За проміжок часу dt через ліву грань паралелепіпеду втікає рідина зі швидкістю u і загальною масою $\rho u dy dz dt$. Через праву грань, що відстоїть від лівої на dx , протікає маса рідини

$\rho u dy dz dt + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz dt$. Різниця цих величин складає

$-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz dt$. Аналогічно визначається накопичення маси за рахунок потоку вздовж інших координатних осей. Сумарне накопичення маси рідини складе

$$-\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right) dx dy dz dt.$$

Маса рідини в паралелепіпеді за проміжок dt зміниться на $\frac{\partial(\rho n)}{\partial t} dx dy dz dt$. Звідси одержимо рівняння нерозривності

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = -\frac{\partial(\rho n)}{\partial t}. \quad (3.8)$$

Це рівняння слід розглядати разом з рівняннями стану рідини і середовища

$$\rho = \rho_0 + \rho_0 \frac{P - P_0}{E_f}, E_f = \frac{1}{\beta_f}, n = n_0 + \frac{P - P_0}{E_s}(1 - n_0), E_s = \frac{1}{\beta_s}, \quad (3.9)$$

де ρ_0 і n_0 – щільність рідини і пористість середовища при атмосферному тиску P_0 ; E_f , E_s – модулі деформації рідини і пористого середовища.

Згідно (3.6) з урахуванням (3.3) і (3.7), компоненти швидкості визначаються

$$u = -\frac{\kappa}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad v = -\frac{\kappa}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y}, \quad w = -\frac{\kappa}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g \right), \quad (3.10)$$

Уводячи співвідношення (3.9) і (3.10) до (3.8), одержимо

$$\begin{aligned} \frac{\kappa \rho}{\mu} \left\{ \Delta P + \frac{\rho_0}{\rho E_f} \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)^2 \right] + 2 \frac{\rho_0 g}{E_f} \frac{\partial P}{\partial z} \right\} = \\ = \left[\frac{\rho_0 n}{E_f} + \frac{\rho(1 - n_0)}{E_s} \right] \frac{\partial p}{\partial t}. \end{aligned}$$

Зневажаючи квадратами похідних і приймаючи $\rho \approx \rho_0$, $n \approx n_0$ [3.18], маємо:

$$a \left(\Delta P + 2\gamma_0 \beta_f \frac{\partial P}{\partial z} \right) = \frac{\partial P}{\partial t}, \quad a = \frac{\kappa}{\mu \beta^*}, \quad (3.11)$$

де $\beta^* = n_0 \beta_f + (1 - n_0) \beta_s$, $\gamma_0 = \rho_0 g$, a – коефіцієнт пезопродовідності, який змінюється від $0.1 \cdot 10^2$ м²/добу для пухких порід до $6 \cdot 10^6$ м²/добу для скелястих порід. Рівняння (3.11) описує гравітаційно-пружний режим фільтрації, при якому враховуються пружні властивості, як рідини, так і пористого середовища. Аналіз параметрів, що входять до рівняння (3.11), засвідчує, що при $a < 10^5$ м²/добу другий доданок у дужках у лівій частині можна відкинути і перейти до рівняння типу теплопровідності.

Якщо зневажити стисливість, то прийдемо до рівняння

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0. \quad (3.12)$$

Підставляючи сюди (3.10), з урахуванням (3.3) одержимо

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial H}{\partial z} \right) = 0. \quad (3.13)$$

Для однорідного ґрунту ($K=\text{const}$) (3.13) переходить у рівняння Лапласа.

При розв'язанні фільтраційних задач найбільш часто зустрічаються такі типи границь (рис. 3.6):

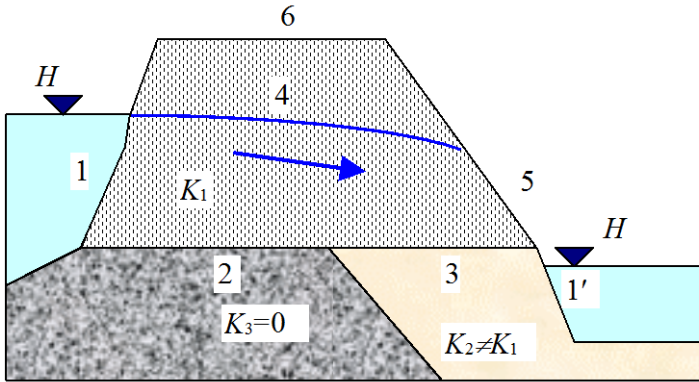


Рис. 3.6. Типи границь фільтраційного потоку.
Номера – типи границь (див. у тексті)

1) поверхня контакту водоносного шару з поверхневими водами, де заданий постійний чи змінний у часі напір

$$H = H_1(t); \quad (3.14)$$

2) непроникна границя, потік через яку дорівнює нулю

$$\frac{\partial H}{\partial l} = 0, \quad (3.15)$$

де l – вектор нормалі до границі;

3) границя поділу середовищ з різною проникністю, де задана умова рівності напорів і потоків

$$H_1 = H_2, \quad K_1 \frac{\partial H_1}{\partial l} = K_2 \frac{\partial H_2}{\partial l}; \quad (3.16)$$

4) вільна поверхня, де тиск води дорівнює атмосферному

$$H=z, \text{ або } P=0; \quad (3.17)$$

5) ділянка височування, на якій насичений потік виходить на поверхню землі вище рівня поверхневих вод. Тиск води незначно перевищує атмосферний, тому тут задається умова (3.17);

б) границя ненасиченого потоку, через яку вниз надходять атмосферні опади (інфільтрація) і йде випаровування.

У [3.11] детально розглянута нелінійна умова на вільній поверхні.

3.4. РІВНЯННЯ БЕЗНАПІРНОГО ПОТОКУ

Розглянемо фільтрацію рідини з вільною поверхнею над непроникним водоупором $z=b(x,y)$. Припустимо, що вільна поверхня $z=f(x,y)$ має незначний ухил, тому похідні $\partial H/\partial x$ і $\partial H/\partial y$ малі, лінії току практично горизонтальні, поверхні рівних напорів близькі до циліндричних поверхонь з вертикальними утворюючими, а лінії току, пересічені вертикальною прямою, майже паралельні. Величина $-K \partial H/\partial l$ і швидкість фільтрації будуть близькі в різних точках на одній вертикалі. У таких умовах, відповідно до припущення Дюпюї, напір H можна вважати однакоим по висоті та осереднити його уздовж вертикалі, прийнявши для неї

$$u = -K \frac{\partial H}{\partial x}, \quad v = -K \frac{\partial H}{\partial y}. \quad (3.18)$$

Виділимо в потоці елементарний об'єм і складемо для нього рівняння нерозривності (рис. 3.7). Через ліву грань за проміжок часу dt притікає маса рідини $\rho u h dy dt$, через праву грань, що відстоїть від лівої на dx – маса $\rho u h dy dt + \rho \frac{\partial(uh)}{\partial x} dx dy dt$. Відповідне накопичення у виділеному об'ємі складе

$-\rho \frac{\partial(uh)}{\partial x} dx dy dt$. Її сумарне накопичення в даному об'ємі з урахуванням притоку уздовж осі Oy і рідини, що надходить ззовні за рахунок інфільтрації атмосферних опадів ($\rho \varepsilon dx dy dt$), складе

$$-\rho \left(\frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial y} - \varepsilon \right) dx dy dt. \quad (3.19)$$

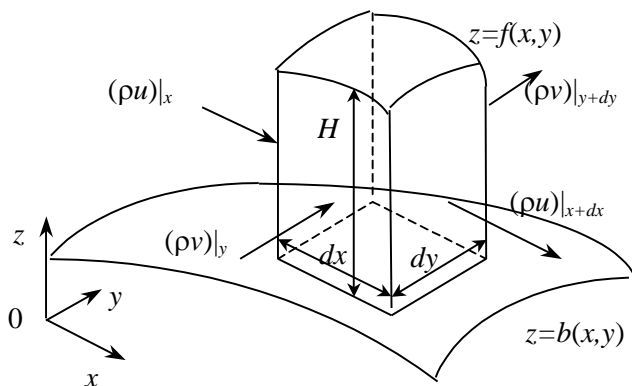


Рис. 3.7. Елементарний об'єм (до виведення рівняння Бусінеска)

Стисливістю води в безнапірних потоках, як правило, можна зневажити. Тому збільшення маси в даному об'ємі за час dt обумовлено тільки підвищенням рівня вільної поверхні

$$\rho n \frac{\partial h}{\partial t} dx dy dt. \quad (3.20)$$

Прирівнюючи (3.19) і (3.20), і, роблячи граничний перехід $dx \rightarrow 0$, $dy \rightarrow 0$, $dt \rightarrow 0$, з урахуванням (3.18) одержимо рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(Kh \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(Kh \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \varepsilon = n \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (3.21)$$

Для горизонтального водоупора $h=H$, тоді при $K=\text{const}$ рівняння (3.21) записується у вигляді

$$K \left(\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h^2}{\partial y^2} \right) + 2\varepsilon = 2n \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (3.22)$$

Аналітичне вирішення нелінійних рівнянь (3.21) і (3.22) нагтовхується на труднощі математичного характеру, хоча для ряду одновимірних задач отриманий ряд точних розв'язків [3.3]. У випадку стаціонарної одновимірної течії на горизонтальному водоупорі при відсутності інфільтрації (3.22) спрощується, переходячи до рівняння

$$\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} = 0.$$

Тоді при заданих напорах на межах $h(0)=h_0$, $h(L)=h_L$ одержимо параболу Дюпюї (рис. 3.8).

$$h(x) = \sqrt{h_0^2 + x/L(h_L^2 - h_0^2)}.$$

Рівняння (2.22) можна лінеаризувати, записавши у вигляді

$$K \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \varepsilon = \frac{n}{h_s} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u = \frac{h^2}{2}. \quad (3.23)$$

де h_s – середня глибина потоку на розглянутій ділянці. Існують й інші способи лінеаризації рівняння (3.22) [3.1], які також переводять його до рівняння типу теплопровідності.

Рівняння (3.21) (рівняння Бусинеска) записано для випадку абсолютно непроникного водоупора. Досить часто зустрічається «відносний водоупор», через який можливий слабкий рух рідини по тріщинах і порах. Як правило, вважається [3.4], що інтенсивність перетоку ε_d через нижню границю (підшву водоносного шару) обумовлена різницею напорів у верхньому і нижньому водоносних шарах $\varepsilon_d = K_0(H - H_1)/m_0$ (рис. 3.9). Тут H_1 – напір у нижньому шарі, K_0 – коефіцієнт фільтрації водоупора, m_0 – його товщина (потужність).

З урахуванням перетікання рівняння (3.21) запишеться так:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(Kh \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(Kh \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \varepsilon - \frac{K_0}{m_0} (H - H_1) = n \frac{\partial h}{\partial t}.$$

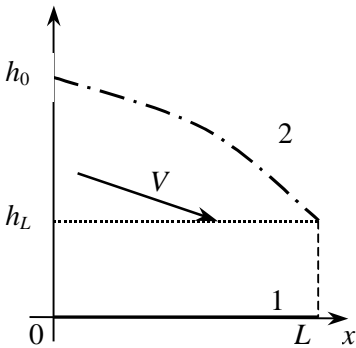
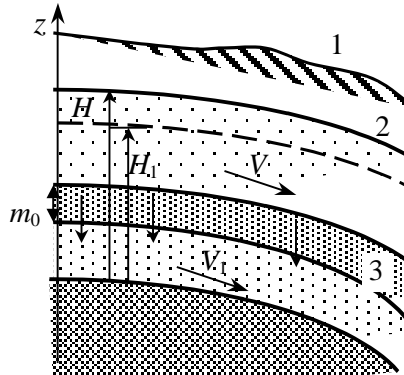


Рис. 3.8. Парабола Дююї:
 (1 – водоупор, 2 – вільна поверхня
 або рівень ґрунтових вод)



**Рис. 3.9. Схема перетікання через
 слабопроникний прошарок:**
 1 – поверхня землі, 2 – вільна поверхня,
 3 – слабопроникний прошарок

Викладений підхід до моделювання фільтраційних течій називається гідравлічною моделлю. Вона має певні переваги: 1) знижується вимірність задачі, 2) напір і положення вільної поверхні у верхньому водоносному шарі знаходяться одночасно, 3) спрощується завдання вертикальних границь, 4) зменшується число граничних умов.

3.5. ФІЗИКО-ХІМІЧНІ ПРОЦЕСИ У ФІЛЬТРАЦІЙНОМУ ПОТОЦІ

Масоперенос у фільтраційному потоці являє собою сукупність процесів механічного переносу розчинених або емульсованих речовин, їхніх фізико-хімічних перетворень і масообміну з пористим середовищем. Основними факторами масопереносу є: 1) механічна (вимушена) конвекція, 2) гідродинамічна дисперсія (конвективна дифузія), 3) сорбція і масообмін, 4) фізико-хімічні перетворення (розпад, утворення нових речовин).

Під впливом вимушеної конвекції відбувається механічне переміщення частинок речовини у вигляді розчинів або колоїдів уздовж ліній току фільтраційного потоку. Швидкість переміщення фронту речовини при відсутності масообміну з пористим

середовищем визначається швидкістю фільтрації уздовж лінії току $V(\xi)$ і активною пористістю n_a : $d\xi/dt=V(\xi)/n_a$; тут ξ – криволінійна координата, відлічувана вздовж лінії току. Частинка речовини за проміжок часу $[t_1, t_2]$ переміститься вздовж лінії току на відстань $\xi_2-\xi_1$, яка визначається з рівняння

$$t_2 - t_1 = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{d\xi}{V^*(\xi)}, \quad V^*(\xi) = \frac{V(\xi)}{n_a}.$$

Неоднорідність пористого середовища призводить до того, що вимушена конвекція супроводжується утворенням перехідної зони між областями потоку з максимальною і мінімальною концентраціями. Інтенсивність утворення перехідної зони кількісно характеризується коефіцієнтом гідродинамічної дисперсії, що є тензором другого рангу. В однорідному пористому середовищі виділяють коефіцієнти подовжньої (вздовж напрямку течії) і поперечної (перпендикулярно потоку) дисперсії D_L і D_T , м²/добу. Експериментально встановлено [3.5; 3.9], що

$$D_L = D_0 + \delta_L |v|, \quad D_T = D_0 + \delta_T |v|, \quad (3.24)$$

де δ_L і δ_T – параметри подовжньої і поперечної дисперсії, м; D_0 – коефіцієнт молекулярної дифузії, $D_0=10^{-5} \div 10^{-4}$ м²/добу. Значення δ_L і δ_T для однорідних середовищ складають $10^{-2} \div 10^{-3}$ м, зростаючи до $10 \div 10^2$ м у добре проникних і тріщинуватих породах. Подовжня дисперсія, як правило, на порядок більше поперечної. Оскільки теоретично визначити значення параметрів дисперсії фактично неможливо, тому при вирішенні практичних задач використовуються результати експериментальних вимірів D_L та D_T .

Сорбція (десорбція) являє собою процес зв'язування (звільнення) речовини на поверхні пористого середовища. Процеси сорбції обумовлені поверхневими явищами на межі поділу «рідина-тверде тіло». Відповідно до моделі Нернста (дифузійного примезового шару) [3.6] на поверхні зерен сорбенту утворюється тонкий (частки мкм), практично нерухомий шар рідини, куди внаслідок різниці електричного заряду притягаються і затримуються частинки речовини з рідкого середовища.

Важливим параметром сорбції є питома ємність іонного обміну N_0 , мг-екв·г⁻¹, що визначається як маса розчиненої речовини, яку може зв'язати (поглинути) сорбент масою 1 г. Внаслідок звивистості порових каналів, наявності тупикових пор при масообміні використовується фактично не вся ємність. При зменшенні розмірів частинок пористого середовища параметр N_0 збільшується, досягаючи в глинистих породах декількох десятків мг-екв/100 г сухої маси сорбенту.

Параметром кінетики сорбції є швидкість масообміну γ , діб⁻¹, яка обернено пропорційна тривалості проміжку часу, протягом якого між розчином і сорбентом установлюється рівновага. При іонному обміні, фізичній адсорбції рівновага досягається протягом декількох годин, при сорбції з утворенням хімічних зв'язків – кілька діб [3.6; 3.9]. Тому масоперенос, що триває місяці і роки, звичайно описується за допомогою ізотерм рівноважної сорбції виду $N=f(\varphi)$, де N – концентрація речовини у сорбенті, φ – у розчині.

При малих концентраціях справедлива лінійна залежність (ізотерма Генрі) (рис. 3.10)

$$N = K_d \varphi, \quad (3.25)$$

де K_d – коефіцієнт розподілу, що залежить від речовини, властивостей породи, мінералізації розчину, присутності в ньому інших домішок тощо [3.14]. При високих концентраціях співвідношення між N і φ більш точно визначається ізотермою Ленгмюра

$$N = \frac{K_d \varphi}{1 + K_d \varphi / N_0}.$$

При малих концентраціях речовини у розчині має місце $N \sim K_d \varphi$ (ізотерма Генрі), при значних концентраціях сорбент майже цілком насичується: $N \rightarrow N_0$. Для опису сорбції в багатьох

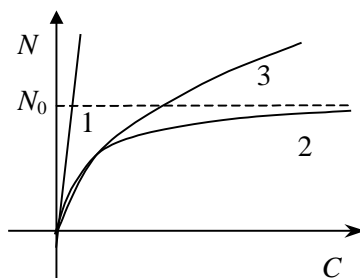


Рис. 3.10. Ізотерми рівноважної сорбції:
1 – Генрі, 2 – Ленгмюра,
3 – Фрейндліха

випадках використовується також ізотерма Фрейндліха $N=k\varphi^\gamma$, де k, γ – емпіричні параметри.

Нерівноважний масообмін описується диференціальними рівняннями виду $\partial N/\partial t=f(\varphi, N)$, які є в загальному випадку нелінійними. При малих концентраціях може бути використана лінійна ізотерма Генрі виду $\partial N/\partial t=\gamma(K_d\varphi-N)$. При $\varphi>N/K_d$ ($\partial N/\partial t>0$) відбувається сорбція, при $\varphi<N/K_d$ ($\partial N/\partial t<0$) – десорбція. Необоротна сорбція з міцною фіксацією речовини сорбентом може бути описана рівнянням виду $\partial N/\partial t=\alpha\varphi$, розчинення і кристалізація – рівнянням $\partial N/\partial t=\gamma(\varphi_{max}-\varphi)N^\beta$, де φ_{max} – максимально можлива розчинність речовин, α, β, γ – емпіричні параметри цих процесів.

Міграція речовин супроводжується процесами їхньої деструкції (розпаду), що можуть бути описані рівнянням реакції першого порядку

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} = -\lambda_1\varphi_1, \quad (3.26)$$

де φ_1 – концентрація вихідної речовини, $\lambda_1=\ln 2/T_1$ – постійна її розпаду, дб^{-1} , T_1 – період її піврозпаду. Інтенсивність утворення дочірньої речовини при розпаді материнської може бути описана рівнянням

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} = \lambda_1\varphi_1 - \lambda_2\varphi_2, \quad (3.27)$$

де λ_2 – постійна розпаду дочірньої речовини.

3.6. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ МАСОПЕРЕНОСУ В ПІДЗЕМНИХ ВОДАХ

Шуканими функціями при розв’язанні задач масопереносу у фільтраційних потоках є концентрації речовини в поровому розчині φ і в твердій фазі N . При вивченні масопереносу розчинних речовин у підземних водах поряд з рівняннями фільтрації (розділи 3.3, 3.4) розглядаються рівняння переносу і дифузії, а

також балансу маси речовини в елементарному об'ємі пористо-го середовища [3.5; 3.9; 3.30] (рис. 3.11)

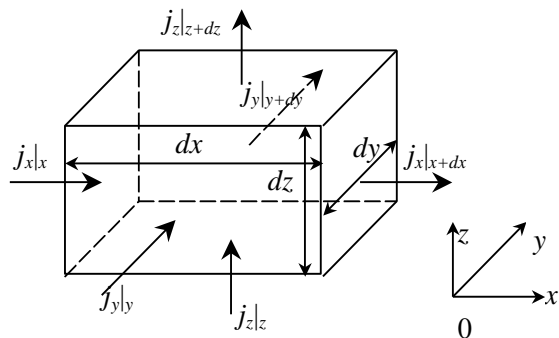


Рис. 3.11. Елементарний об'єм
(до виведення рівняння конвективної дифузії)

$$j_x = u\varphi - D_x \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad j_y = v\varphi - D_y \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad j_z = w\varphi - D_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (3.28)$$

$$-\frac{\partial j_x}{\partial x} - \frac{\partial j_y}{\partial y} - \frac{\partial j_z}{\partial z} + q = \frac{\partial(1-n)N}{\partial t} + \frac{\partial(n\varphi)}{\partial t}, \quad (3.29)$$

а також ізотерми нерівноважної або рівноважної сорбції:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = f(\varphi, N, \varphi^*, N^*, \gamma, \gamma^*), \quad F(\varphi^*, N^*, \gamma^*) = 0. \quad (3.30)$$

Тут u, v, w – компоненти швидкості фільтрації; D_x, D_y, D_z – компоненти тензора дисперсії (дифузії); j_x, j_y, j_z – компоненти масової швидкості розчиненої речовини; φ і N – її масові концентрації в рідкій і твердій фазах (на одиницю об'єму розчину і пористого середовища); φ^* і N^* – те ж в умовах рівноваги; γ і γ^* – параметри сорбції, q – інтенсивність внутрішніх джерел речовини в об'ємі середовища $dx \, dy \, dz$.

Система рівнянь (3.8), (3.10), (3.28) – (3.30) містить 12 рівнянь з 12 невідомими. Параметри в'язкості, щільності, пористості і проникності, що входять до системи, взагалі кажучи, залежать від концентрацій φ і N . Однак при малих концентраціях (до 10 г/л) і незначних змінах температури зазначені параметри

можна прийняти постійними і вирішувати задачі фільтрації і масопереноса незалежно одну від іншої.

Підставляючи (3.28) у (3.29), одержимо рівняння конвективної дифузії

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} - u\varphi \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} - v\varphi \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} - w\varphi \right) + q = \\ = (1-n) \frac{\partial N}{\partial t} + n \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

У випадку рівномірної оборотної сорбції, коли $\partial N/\partial t = K_d \partial \varphi/\partial t$, це рівняння записується у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} - u\varphi \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} - v\varphi \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} - w\varphi \right) + q = n_e \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

де $n_e = (1-n)K_d + n$ – коефіцієнт ефективної пористості, який враховує сорбцію, описувану ізотермою Генрі.

При розпаді (деструкції) речовини в ліву частину рівняння масопереносу додається об'ємний стік згідно (3.26). Оскільки фізико-хімічні трансформації йдуть як у рідкій, так і в твердій фазі, то й доданок $\lambda\varphi$ збільшується на коефіцієнт n_e

$$\operatorname{div} (D \operatorname{grad} \varphi - \vec{V}\varphi) + q - n_e \lambda \varphi = n_e \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (3.33)$$

Для фільтраційного потоку, горизонтальні розміри якого на один-два порядки більше його вертикальних розмірів, можна осереднити концентрацію речовини за товщиною водоносного шару і замість (3.31) одержати більш просте двовимірне рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} - u \bar{\varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} - v \bar{\varphi} \right) + \frac{q}{m} - q_u - q_d = (1-n) \frac{\partial N}{\partial t} + n \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t}, \quad (3.34)$$

де m – глибина потоку (товщина водоносного шару); q_u , q_d – масопотоки через його верхню і нижню межі;

$$\bar{\varphi}(x, y, t) = \frac{1}{m_0} \int_0^m \varphi(x, y, z, t) dz - \text{осереднена по вертикалі концент-}$$

рація. Аналогічний підхід був використаний при побудові двовимірної моделі переносу домішки в приземному шарі атмосфери та в мілких водоймах.

У задачах масопереносу в підземних водах найбільш часто зустрічаються такі типи граничних умов [3.5] (рис.3.12).

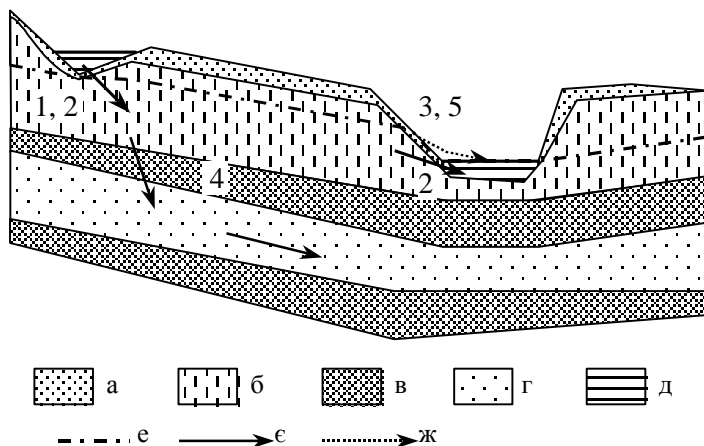


Рис. 3.12. Типи границь області масопереносу:

номери – типи границь (3.35) – (3.39); а) верхній шар ґрунту, б) породи верхнього водоносного шару, в) слабо проникний прошарок, г) добре проникний водоносний шар, д) поверхневий водотік (водойма), е) рівень ґрунтових вод, ж) напрямок міграції через поверхню землі, з) напрямок міграції в підземних водах

1. Задана концентрація на границі області Г

$$\varphi(x, y, z, t)|_Г = \varphi_Г. \quad (3.35)$$

Дана умова справедлива при високих вхідних швидкостях фільтраційного потоку, коли на границі миттєво утворюється зона з максимальною концентрацією. На вихідній границі ця умова відповідає миттєвому відводу речовини з поверхні.

2. Умова Данквертса-Бреннера третього роду

$$-D \left. \frac{\partial \varphi}{\partial l} \right|_{\Gamma} + V_l \varphi = V_l \varphi_{\Gamma}, \text{ чи } D \left. \frac{\partial \varphi}{\partial l} \right|_{\Gamma} = V_l (\varphi - \varphi_{\Gamma}), \quad (3.36)$$

відповідає балансу речовини в граничному перетині: потік речовини з рідкого середовища дорівнює сумі конвективного і дифузійного потоків у пористе середовище. Тут l – вектор нормалі до межі Γ , V_l – швидкість уздовж напрямку l на межі. На відміну від умови першого роду концентрація на вхідній границі не відразу стає максимальною. На вихідній границі умова (3.36) означає відвід речовини в рідке середовище, якщо концентрація речовини в ній дорівнює φ_{Γ} .

3. Умова

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial l} \right|_{\Gamma} = 0 \quad (3.37)$$

відповідає випадку витікання підземних вод через поверхню землі (на ділянці височування), коли внаслідок порушення суцільності потоку винос речовини через границю можливий тільки шляхом конвекції.

Умова рівності нулю градієнта концентрації виду (3.37) може прийматися також на «нескінченно» віддалених границях і означати незмінність там початкової концентрації.

4. На границі поділу двох середовищ з різними фізичними властивостями задаються умови рівності концентрацій і потоків

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad n_1 \left(D_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} - V_i \varphi_1 \right) = n_2 \left(D_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} - V_i \varphi_2 \right), \quad (3.38)$$

де n_1 і n_2 – пористість у середовищах «1» і «2»; $i=1,2,3$; x_i – декартові координати; V_i – компоненти швидкості.

5. При повному або частковому випарі поблизу вихідної границі відбувається нагромадження речовини. Її винос за межі області можливий лише конвективним шляхом, причому питомий об'єм стікаючої води зменшується за рахунок випаровування і складає $(1-\alpha)V_i$, де $\alpha=\varepsilon/V_i$, ε – інтенсивність випару, мм/добу. Такому процесу відповідає умова

$$D \frac{\partial \varphi}{\partial l} \Big|_{\Gamma} + \alpha V_l \varphi = 0. \quad (3.39)$$

3.7. МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ТЕЧІЙ

При розв'язанні прикладних задач потоки підземних вод можуть бути схематизовані за такими ознаками: а) за зміною в часі (сталі і несталі), б) за напрямком (наприклад, плоско-паралельні, осесиметричні), в) за розмірністю (одно, дво-, та тривимірні). Двовимірні потоки можна розділити також на плоско-вертикальні і плоско-горизонтальні. Через складну конфігурацію шарів і геологічних структур перераховані потоки не існують у чистому вигляді.

Серед задач динаміки підземних вод велику практичну важливість набули розрахунки водозаборів (свердловин), дренажів, підтоплення (підвищення рівня ґрунтових вод) на великих територіях. Дренаж – це система підземних каналів (дрен) для зниження рівня підземних вод. Дрена являє собою штучний підземний канал, виконаний у вигляді пластмасових, металевих чи керамічних перфорованих труб. Дренажі застосовуються, зокрема, для осушення сільськогосподарських земель, на підтоплених територіях.

Значна частина водозаборів розташовується поблизу поверхневих водотоків. Водовідбір зі свердловин, що сягає тисяч м³/добу, компенсується за рахунок притоку річкових вод і атмосферних опадів. Фільтрація з річкових русел звичайно супроводжується втратами напору на подолання опору слабопроникних відкладень на дні, а також через малу ширину ріки, слабкий контакт із шаром. Якщо ці втрати значні, то річкове русло класифікується як недосконале. Досконале русло звичайно глибоко входить у водоносний шар і має з ним хороший гідравлічний зв'язок (рис. 3.13).

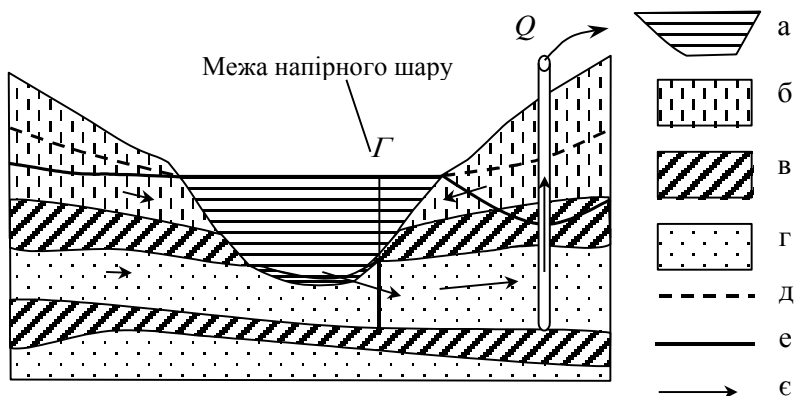


Рис. 3.13. Схема розташування водозаборів поблизу поверхневих водотоків (меж водоносних шарів)

- а) поверхневий водотік, б) породи верхнього водоносного шару,
- в) слабопроникний прошарок, г) напірний, добре проникний водоносний шар,
- д) рівень ґрунтових вод, е) напір підземних вод; е) напрямки фільтрації

В умовах сталого двовимірного потоку підземних вод для одиночної свердловини з постійною витратою (дебітом) Q , розташованої в однорідному шарі середньої товщини m та з коефіцієнтом фільтрації K у точці з координатами (x_0, y_0) , розподіл зниження підземних вод h може бути описаний рівнянням

$$Km \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) = Q \delta(x - x_0, y - y_0), \quad (3.40)$$

де $h = H_0 - H_3$; H_0 – рівень підземних вод, сформований без впливу свердловини; H_3 – їх знижений рівень. Рішення рівняння (3.40), вперше отримане Форхгеймером для напівобмеженої області $x \geq 0$, на межі якої $x=0$ підтримується постійний рівень ($h=0$), має вигляд

$$h(x, y) = \frac{Q}{2\pi Km} \ln \frac{\rho}{r}, \quad (3.41)$$

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \rho = \sqrt{(x + x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Для групового водозабору (рис. 3.14), що складається з n довільно розташованих свердловин, розподіл зниження в напі-

вобмеженому шарі ($x \geq 0$) розраховується підсумовуванням знижень від окремих свердловин за формулою

$$h(x, y) = \frac{1}{2\pi Km} \sum_{i=1}^n Q_i \ln \frac{\rho_i}{r_i} . \quad (3.42)$$

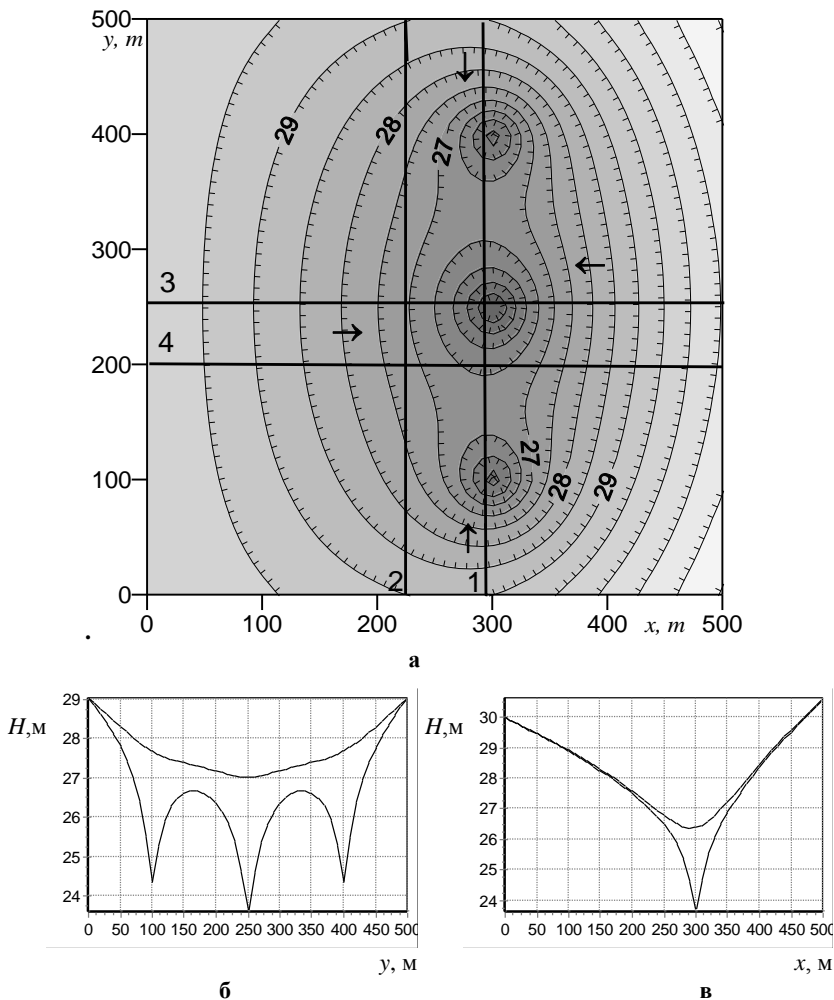


Рис. 3.14. Рівень підземних вод H поблизу системи відкачних свердловин: а) в плані, б) уздовж профілів 1 та 2, в) уздовж профілів 3 та 4

Нестала фільтрація при дії одиночної свердловини описується рівнянням

$$Km \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) - Q \delta(x - x_0, y - y_0) = \Sigma \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (3.43)$$

де $\Sigma = \beta^* m$ – пружноємність напірного шару (див. також розділ 3.3). Вона визначається як відношення зміни об'єму води у водоносному шарі на одиниці площі до відповідної зміни напору. Розв'язок рівняння (3.43), вперше отриманий Тейсом для необмеженого шару, має вид

$$h(x, y) = -\frac{Q}{4\pi Km} Ei \left(-\frac{r^2}{4at} \right), \quad r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2, \quad (3.44)$$

де $a = Km/\Sigma$ – коефіцієнт п'єзопровідності шару, $Ei(\xi)$ – інтегральна показникова функція [3.31]. Для напівобмеженої області

$$h(x, y) = -\frac{Q}{4\pi Km} \left\{ Ei \left(-\frac{r_1^2}{4at} \right) - Ei \left(-\frac{r_2^2}{4at} \right) \right\},$$

де $r_{1,2}^2 = (x \pm x_0)^2 + (y - y_0)^2$.

Розрахунок зниження для групи свердловин виконується аналогічно формулі (3.42).

У випадку стрибкоподібних змін дебіту за часом $Q(t) = Q_i$, $t_{i-1} \leq t < t_i$, ($i = 1, N$), розрахунок зниження від одиночної свердловини визначається за формулою

$$h = -\frac{1}{4\pi Km} \sum_{i=1}^N (Q_i - Q_{i-1}) \left(Ei \left(-\frac{r_1^2}{4at_i} \right) - Ei \left(-\frac{r_2^2}{4at_{i-1}} \right) \right). \quad (3.45)$$

На практиці використовуються системи як вертикального, так і горизонтального дренажу. Залежно від розмірності розв'язуваної задачі дрена може бути схематизована у вигляді точкового або лінійного стоку. Розрахункові формули для лінійного стоку виводять інтегруванням відповідного розв'язку для точкового стоку вздовж контуру дренажу. Нехай $h(x, y, t)$ – розв'язок задачі відносно зниження, викликаного впливом точкового сто-

ку одиничної інтенсивності. Тоді для горизонтальної дрени, контур якої задається рівняннями $y=f(x)$ чи $x=g(y)$, одержимо

$$\begin{aligned} h_l(x, y, t) &= \int_{x_1}^{x_2} Q_l(\xi) h(x - \xi, y - f(\xi), t) d\xi = \\ &= \int_{y_1}^{y_2} Q_l(\eta) S_p(x - g(\eta), y - \eta, t) d\eta, \end{aligned} \quad (3.46)$$

де (x_1, y_1) , (x_2, y_2) – кінцеві точки контуру; Q_l – питомий дебіт дрени, що може змінюватися вздовж неї, м²/добу. Розрахунки дренажів при різних умовах детально розглядалися в багатьох роботах, у тому числі в [3.1; 3.4; 3.34].

Формула (3.46), що отримана для лінійних стоків, може також бути використана і для прогнозу підтоплення, яке в міських умовах часто викликається витоками із систем водо- і теплопостачання. Тоді під Q_l розуміється інтенсивність витоків, а рівняння $y=f(x)$ і $x=g(y)$ описують положення ділянки лінії водопостачання, де мають місце витоки.

Якщо витоки відбуваються на досить великій ділянці відносно рівномірно, то можна використовувати схему розтікання «фільтраційних бугрів» [3.11, 3.30]. Процес підйому рівня ґрунтових вод на віддаленні від границь водоносного шару після короткочасного витоку об'ємом W може бути описаний лінеаризованим рівнянням безнапірної фільтрації

$$Km \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) = \mu_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.47)$$

при початкових умовах

$$h(x, y, 0) = \begin{cases} h_0, & (x, y) \in \Omega, \\ 0, & (x, y) \notin \Omega, \end{cases} \quad (3.48)$$

де Ω – прямокутна ділянка $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$, де відбулось «миттєве» надходження об'єму води W ; $h_0 = W / [(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \mu_s]$ – підйом рівня ґрунтових вод у момент часу, прийнятий за початковий, μ_s – дефіцит насичення (див. розділ 3.1). Інтегруючи функ-

цію миттєвого точкового джерела рівняння (3.47) в області Ω , одержимо формулу для прогнозу подальшої зміни рівня ґрунтових вод у водоносному шарі

$$h(x, y, t) = \frac{h_0}{4} [\operatorname{erf}(\xi_1) - \operatorname{erf}(\xi_2)] [\operatorname{erf}(\eta_1) - \operatorname{erf}(\eta_2)], \quad (3.49)$$

$$\xi_{1,2} = \frac{x - x_{1,2}}{2\sqrt{at}}, \quad \eta_{1,2} = \frac{y - y_{1,2}}{2\sqrt{at}}, \quad a = \frac{Km}{\mu_s}.$$

Якщо цей процес супроводжується рівномірним перетіканням до нижнього водоносного шару через слабопроникний прошарок товщиною m_0 і коефіцієнтом фільтрації K_0 , то розв'язок (3.49) треба помножити на $\exp(-K_0 t/m_0)$.

При постійних витоках на прямокутній ділянці з інтенсивністю ε , $\text{м}^3/(\text{м}^2 \text{добу})$ в ліву частину (3.47) додається функція

$$Q(x, y) = \begin{cases} \varepsilon, & (x, y) \in \Omega, \\ 0, & (x, y) \notin \Omega, \end{cases}$$

а початкова умова приймається однорідною: $h_0=0$. Інтегруючи (3.49) за часом, одержимо формулу для розрахунку підйому рівня ґрунтових вод

$$h(x, y, t) = \frac{\varepsilon t}{4\mu_w} \int_0^1 S\left(\frac{\xi_1}{\sqrt{\theta}}, \frac{\xi_2}{\sqrt{\theta}}\right) S\left(\frac{\eta_1}{\sqrt{\theta}}, \frac{\eta_2}{\sqrt{\theta}}\right) d\theta, \quad (3.50)$$

в якій $S(\zeta_1, \zeta_2) = \operatorname{erf}(\zeta_1) - \operatorname{erf}(\zeta_2)$, μ_w – коефіцієнт водовіддачі (див. розділ 3.1); інші позначення залишені з попередніх формул. Процес утворення «фільтраційних бугрів» внаслідок витоків з водовідстійника розглянуто в лабораторній роботі № 5.

3.8. МОДЕЛІ ПРОГНОЗУ МІГРАЦІЇ ЗАБРУДНЕНЬ У ПІДЗЕМНИХ ВОДАХ

При розв'язанні прогнозних задач міграції в підземних водах використовуються такі принципи схематизації: 1) перехід до двовимірної моделі масопереносу в рамках гідравлічної тео-

рії фільтрації (рівняння (3.34)); 2) вирішення одновимірних задач переносу вздовж лінії току, побудованих після вирішення фільтраційної задачі (лабораторна робота № 6). Задача вертикальної міграції у верхніх шарах ґрунту може бути вирішена окремо від розв'язання двовимірної задачі горизонтальної фільтрації і масопереносу.

Завдання інтенсивності джерела q у рівняннях (3.31) – (3.34) залежить від розмірності розв'язуваної задачі. Так, ділянка надходження речовини у фільтраційний потік у двовимірній горизонтальній постановці апроксимується як розподілене за площею внутрішнє джерело, в тривимірній постановці – за допомогою неоднорідної граничної умови.

При виборі моделі для прогнозу поширення забруднюючих речовин у потоках підземних вод можна використовувати наступні допущення. При малих концентраціях забруднюючих речовин їхній перенос не робить істотного впливу на динаміку фільтраційного потоку, тому фільтраційна задача може розглядатись незалежно від задачі міграції. Якщо ж фільтраційний потік є сталим, то міграційну задачу можна вирішувати окремо на основі попередньо визначеного поля швидкостей фільтрації. Для прогнозів міграції на тривалі періоди можна зневажати кінетику сорбції, а при малих концентраціях скористатися лінійною ізотермою сорбції для опису масообміну з пористим середовищем. У залежності від обсягу витоків розчинів, що містять забруднюючі речовини, джерела надходження забруднень у підземні води можуть бути схематизовані як гідродинамічно активні (що змінюють структуру течії) і пасивні. Найбільш повне представлення про поширення забруднень у підземних водах дає поле швидкостей фільтраційної течії, на основі якого розв'язується задача масопереносу.

Попередні оцінки зони забруднення підземних вод можна зробити за допомогою «поршневої моделі», в якій впливом дифузії зневажається. Для плоскопаралельного потоку між перетинами 1 і 2 (рис. 3.15, а) середньою глибиною m горизонтальні компоненти швидкості фільтрації дорівнюють

$$u = -K \frac{(H_2 - H_1)}{l} = \frac{Q_n}{mn} = \text{const}, v = 0.$$

де Q_n – витрата фільтраційного потоку, віднесена до одиниці його ширини. Якщо забруднення починає надходити через перетин 1 після моменту $t=0$, то довжина зони забруднення в момент t_1 складає $x_1=Q_n t_1/(n_e m)$, а час досягнення фронтом забруднення точки x_ϕ дорівнює $t_\phi=(n_e \cdot m \cdot n \cdot x_\phi)/Q_n$. Тут швидкість міграції $u_m=u/n_e$. Концентрація в точці x дорівнює

$$\varphi(x, t) = \varphi_0(1 - \theta(t - t_\phi)), \quad \theta(\xi) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1 & t > 0. \end{cases}$$

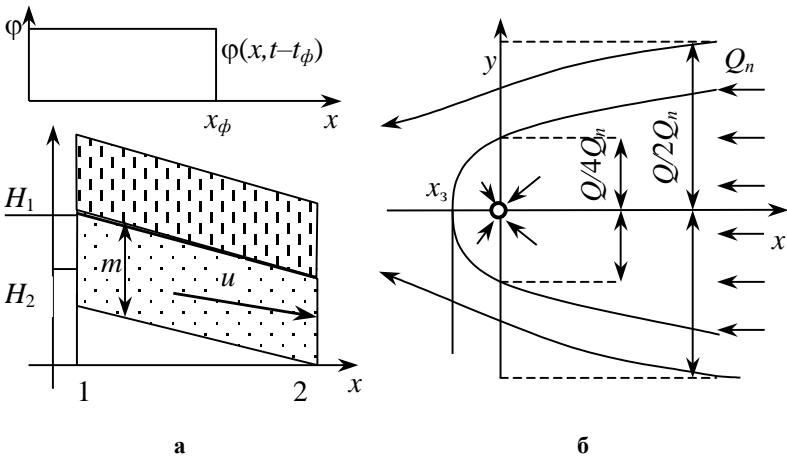


Рис. 3.15. Схема поршневого витіснення:

- а) в незбуреному односпрямованому потоці,
б) односпрямованому потоці при наявності свердловини

Практично цікавим є випадок відкачної свердловини з дебітом Q у плоскопаралельному потоці (рис. 3.15, б), яка розташована в центрі координат. Така ситуація може виникнути при перехопленні свердловиною забруднених підземних вод. Підсумовуючи потенціали точкового стоку і плоскопаралельної течії у водоносному шарі товщиною m , одержимо вирази потенціалу і компонентів швидкості фільтрації

$$\Phi = \frac{1}{m} \left(\frac{Q}{2\pi} \ln \frac{R_c}{r} + Q_n x \right); \quad (3.51)$$

$$v_x = -\frac{1}{m} \left(\frac{Qx}{2\pi r^2} + Q_n \right), v_y = -\frac{Qy}{2\pi m r^2};$$

звідкіля одержимо функцію току розглянутої течії

$$\Psi = \begin{cases} \frac{1}{m} \left(\frac{Q}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + Q_n y \right), & x > 0, \\ \frac{1}{m} \left(\frac{Q}{2\pi} \left(\pi - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right) + Q_n y \right), & x < 0. \end{cases} \quad (3.52)$$

Тут R_c – так званий радіус впливу свердловини, поза меж якого він практично відсутній. Область охоплення свердловиною частини потоку забруднених підземних вод визначається з рівняння $v_x=0$:

$$\begin{aligned} -Q/4Q_n \leq y \leq Q/4Q_n, & \quad x = 0, \\ -Q/2Q_n \leq y \leq Q/2Q_n, & \quad x = \infty. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Координата «точки застою» за свердловиною дорівнює $x_3 = -Q/2\pi Q_n$. Фільтрація забруднених вод до свердловини можлива в зоні, обмеженій нейтральними лініями току. В роботі [3.4] розглянуті також інші схеми розташування свердловин з урахуванням границь потоку і неусталеності процесу. Мінімальний час надходження забруднень до свердловини можна знайти для головної лінії току $\Psi=0$ (при $y=0$).

$$t = \frac{n_e m n}{Q_n} \left(x_0 - x - x_3 \ln \left| \frac{x - x_3}{x_0 - x_3} \right| \right), \quad (3.54)$$

де x і x_0 – поточне і початкове положення фронту забруднення. Величина x обчислюється для заданого часу t при розв'язанні рівняння (3.54).

Прогноз міграції на основі дифузійної моделі враховує розвивання фронту забруднення. Більшість аналітичних розв'язків

отримано для спрощених схем плоскопаралельного і радіально-го потоків.

Досить поширеним випадком є міграція в напівнескінченній області, на вхідній границі якої $x=0$ задається концентрація φ_0 . Процес переносу розчиненої речовини описується одновимірним рівнянням

$$D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - u \frac{\partial \varphi}{\partial x} = n_e \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (3.55)$$

Розв'язок рівняння (3.55) за умови першого роду (3.35), вперше отриманий Самюельсоном [3.30], має вигляд

$$\varphi(x, t) = 0.5\varphi_0 \left\{ \operatorname{erfc}(\xi - \eta) + e^{4\xi\eta} \operatorname{erfc}(\xi + \eta) \right\}, \quad (3.56)$$

$$\eta = \frac{u\sqrt{t}}{2\sqrt{Dn_e}}, \quad \xi = \frac{x}{2\sqrt{Dt/n_e}}.$$

Чисельний аналіз показує, що при $D/(ux) < 0,005$ другий доданок з похибкою 4% можна відкинути. Координата точки з концентрацією $0.5\varphi_0$ рухається з постійною швидкістю u/n_e , що відповідає схемі поршневого витіснення. При русі фронту забруднення утворюються три зони (рис. 3.16а): 1) зона високих концентрацій, близьких до φ_0 ; 2) зона змішування, де концентрація змінюється від 0 до φ_0 ; 3) незабруднена зона, де $\varphi \approx 0$. Ширина зони змішування L_s між точками з концентрацією $0.99\varphi_0$ і $0.01\varphi_0$, що складає $6.6\sqrt{Dt/n_e}$, з часом збільшується.

При наявності розпаду, описуваного рівнянням (3.26), маємо:

$$\varphi(x, t) = 0.5\varphi_0 \left\{ e^{\frac{x(u-\mu)}{2D}} \operatorname{erfc}\left(\frac{x-\mu t}{2\sqrt{Dt}}\right) + e^{\frac{x(u+\mu)}{2D}} \operatorname{erfc}\left(\frac{x+\mu t}{2\sqrt{Dt}}\right) \right\}, \quad (3.57)$$

$$\mu = \sqrt{(u^*)^2 + 4D^*\lambda}, \quad D^* = D/n_e, \quad u^* = u/n_e.$$

де λ – параметр розпаду.

Для опису нестационарного масопереносу в дво- і тривимірних плоскопаралельних потоках при наявності постійно діючих

площинних джерел надходження забруднюючих речовин можна використовувати формули:

$$\varphi(x, y, t) = \frac{t}{mn_e} \int_0^1 q(t(1-\theta)) \varphi_x(x, t\theta) \varphi_y(y, t\theta) d\theta, \quad (3.58)$$

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{t}{n_e} \int_0^1 q(t(1-\theta)) \varphi_x(x, t\theta) \varphi_y(y, t\theta) \varphi_z(z, t\theta) d\theta, \quad (3.59)$$

де φ_x , φ_y , φ_z – розв’язки одновимірних задач масопереносу вздовж осей Ox , Oy , Oz після «миттєвого» забруднення локальної ділянки.

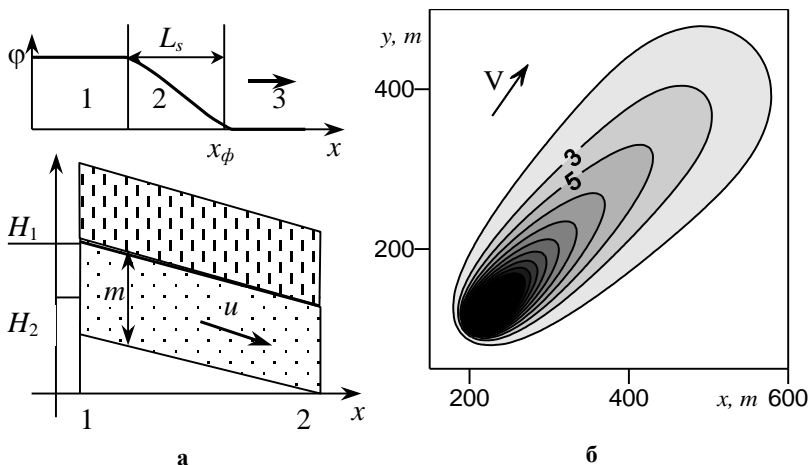


Рис. 3.16. Дисперсійна модель масопереносу:

а) одновимірна схема, б) розподіл концентрації φ , отриманий згідно з двовимірною моделлю для певного моменту часу

Так, для необмеженого в плані водоносного шару в якості φ_x можна використовувати вираз

$$\varphi_x(x, t) = 0.5 \left\{ \operatorname{erf} \left(\frac{x - x_1 - u^* t}{2\sqrt{D_x^* t}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x - x_2 - u^* t}{2\sqrt{D_x^* t}} \right) \right\}, \quad (3.60)$$

для φ_x можна взяти дану формулу, замінивши відповідні позначення. На рис. 3.16, б наведено приклад зони поширення речовини в підземних водах, розрахованої за двовимірною моделлю.

3.9. ВОЛОГОПЕРЕНОС У НЕНАСИЧЕНОМУ ПОРИСТОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Задачі розрахунку вологопереносу в ненасиченому пористому середовищі виникають при прогнозуванні процесів перерозподілу вологи в ґрунті при зрошенні та дренажуванні (в сільському господарстві), при дослідженні переносу забруднюючих речовин у верхніх шарах ґрунтів тощо.

У ненасиченому середовищі значна частина пор заповнена повітрям. Ступінь насиченості пористого середовища характеризується вологістю (див. розділ 3.1). З урахуванням остаточної вологості θ_r , яка визначається водою, гігроскопічно пов'язаною з кістяком пористого середовища, відносна безрозмірна вологість $\bar{\theta}$ дорівнює

$$\bar{\theta} = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_{max} - \theta_r}, \quad (3.61)$$

Водний потенціал (всмоктуючий тиск) ψ формально визначається як робота, яку потрібно виконати з одиницею кількості води в рівноважній системі «пористе середовище-вода» при її русі до резервуара води, що знаходиться в стандартному стані при тій же температурі. Водний потенціал дорівнює нулю на рівні води в п'єзометрі. Нижче цього рівня ψ завжди позитивний і зростає зі збільшенням глибини, навіть якщо вологість не змінюється. Складовими водяного потенціалу є потенціал тиску ψ_p , осмотичний потенціал ψ_s , каркасний потенціал ψ_m . Каркасний потенціал ψ_m обумовлений адсорбційними силами каркаса пористого середовища. У насиченому ґрунті ψ_m теоретично дорівнює нулю, однак на практиці ψ_m навіть у «насиченому» ґрунті може мати невелике від'ємне значення.

Гравітаційний потенціал ψ_z являє собою різницю висот розглянутої точки і точки відліку і не залежить від властивостей ґрунту. Рівень відліку вибирається довільно, тому практичний інтерес представляє лише різниця потенціалів між двома точками. Гравітаційний потенціал ψ_z разом з водним потенціалом ψ дає сумарний водний потенціал $\Phi = \psi + \psi_z$.

В ізотермічних умовах вода тече від ділянок з високим сумарним водним потенціалом до ділянок з низьким потенціалом. Внаслідок цього можлива ситуація, коли вода тече в напрямку, протилежному до напрямку сили тяжіння (наприклад, при інтенсивному випаровуванні, коли вода підіймається з нижніх, зволжених, до верхніх, сухих шарів ґрунту). Потік води утворюється за рахунок градієнта водного потенціалу, а не градієнта вологості. Тому потенціал є неперервною функцією глибини навіть у шаруватому середовищі. Разом з тим на границях між шарами з різними властивостями спостерігається різкий розрив вологості.

Гідравлічна провідність K у ненасиченому ґрунті головним чином залежить від його вологості: K зменшується на кілька порядків від значення коефіцієнта фільтрації при вологості насичення θ_{max} до гранично низьких значень при остаточній вологості θ_r . Тому практично важливим є визначення співвідношень між вологістю θ , всмоктуючим тиском ψ та гідравлічною провідністю K , тобто залежностей $\psi = \psi(\theta)$ та $K = K(\psi)$. Для цього використовуються емпіричні формули (табл. 3.2, рис. 3.17), або функції у табличному вигляді [3.5; 3.14]. Внаслідок гістерезису в ненасиченому середовищі ці залежності можуть суттєво відрізнятися для випадків насичування та осушення, хоча для дослідження цього ефекту потрібні досить точні виміри.

Згідно з класичною моделлю вологопереносу рух рідини може бути описаний аналогом закону Дарсі

$$\vec{V} = -K \text{grad } \Phi, \quad \Phi = \frac{\Psi}{\rho g} + z, \quad (3.62)$$

де Φ – сумарний водний потенціал; \vec{V} – швидкість вологопереносу; K – коефіцієнт гідравлічної провідності, $K = K(\psi)$, ψ – всмоктуючий тиск. Аналогічно насиченій зоні виводиться рівняння нерозривності ненасиченого потоку:

$$\text{div}(\rho \vec{V}) = -\frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad (3.63)$$

де ρ – густина рідини, θ – вологість пористого середовища. Підставляючи (3.62) до (3.63), одержимо рівняння Річардса:

**Емпіричні формули для визначення параметрів
ненасиченого пористого середовища [3.5; 3.40]**

№	Автор	Формула	Пояснення
1	Ірмей, Аверьянов, Колліс- Джордж, Чайлдс	$K_r = \bar{\theta}^p$	Може використовуватись для однорідних ґрунтів; $p=3$ (Ірмей), $p=3.5$ (Аверьянов)
2	Гарднер	$K = \frac{a}{(b + \psi ^m)}$	a, b – параметри, $m=2$ для важких глин, $m=4$ для пісків. У насиченому стані ($ \psi =0$), $K=a/b$
3	Гарднер	$\bar{\theta} = \exp(-\alpha(\psi + \psi_\alpha))$, $K_r = \exp(-\beta(\psi + \psi_\alpha))$.	$\alpha, \beta, \psi_\alpha$ – параметри. Не завжди добре узгоджується з експериментальними даними, але зручна для одержання аналітичних розв'язків
4	Муалем – Ван- Генухтен	$\bar{\theta} = [1 + \alpha\psi ^n]^m$, $K_r = \sqrt{\bar{\theta}} \left[1 - \left(1 - \left(\frac{1}{\bar{\theta}} \right)^m \right)^2 \right]$	Базується на детальному врахуванні геометрії пор та ступеня їхнього заповнення. α, n, m – параметри, причому $m=1-1/n$

$K_r = K(\psi)/K_0$, K_0 – коефіцієнт фільтрації або гідравлічна провідність насиченого пористого середовища

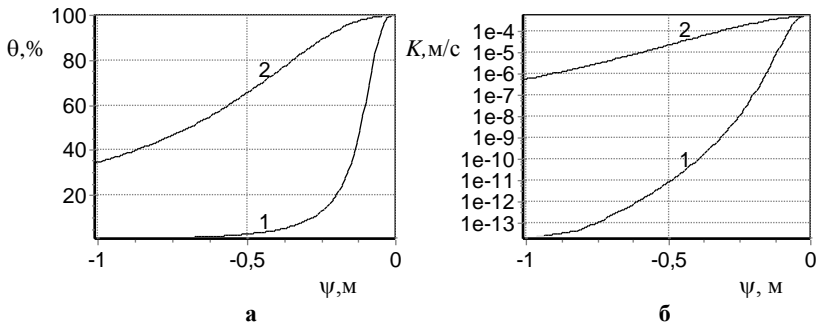


Рис. 3.17. Залежність вологості (а) та гідравлічної провідності (б) ненасиченого середовища від всмоктуючого тиску ψ , визначені за формулою 4 з табл. 3.2:
1) грубозернистий матеріал, 2) дрібнозернистий пісок

$$\operatorname{div}(K(\psi)\operatorname{grad}\Phi) = \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad (3.64)$$

або, з урахуванням внутрішніх джерел та стоків (відбір вологи кореннями рослин чи системами дренажу, зрошення тощо) інтенсивністю Q

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial K}{\partial z} + Q = \frac{\partial \theta}{\partial t}. \quad (3.65)$$

Дану задачу можна вирішити за допомогою підстановки відносно тиску, або вологості θ . Перший спосіб дає рівняння відносно ψ

$$\operatorname{div}(K(\psi)\operatorname{grad}\psi) - \frac{\partial K(\psi)}{\partial z} + Q = c(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (3.66)$$

де $c(\psi) = \partial\theta/\partial\psi$ – вологоємність ненасиченого середовища. Цей спосіб дозволяє моделювати вологоперенос одночасно і в насиченому, і в ненасиченому ґрунті, оскільки за допомогою співвідношення (3.62) легко перейти від тиску ψ до потенціалу Φ .

Заміна відносно вологості приводить до рівняння

$$\operatorname{div}(D(\theta)\operatorname{grad}\theta) - \frac{\partial K(\theta)}{\partial z} + Q = \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad (3.67)$$

де $D(\theta) = K(\theta) \partial\psi/\partial\theta$ – дифузійність пористого середовища.

При моделюванні вологопереносу в початковий момент часу задається вологість або тиск, виходячи з розподілу вологості за вертикаллю. На границях, як правило, задаються умови першого або третього роду: тиск або потік води (інфільтрація чи випаровування).

Моделювання вологопереносу ускладнюється істотною нелінійністю цього процесу, що проявляється в тому, що параметри середовища (K , ψ) змінюються в залежності від вологості та температури. Тому надійні результати розрахунків переносу вологи і розчинених речовин у ненасиченому пористому середовищі можуть бути отримані тільки шляхом чисельного моделювання.

3.10. ФІЛЬТРАЦІЯ ДВОФАЗНОЇ РІДИНИ

Велике коло практичних задач приводить до необхідності розглядати течії багатofазних рідин у пористих середовищах. До таких процесів відносяться: фільтрація нафтоводної суміші, міграція в ґрунтах так званих «неводних рідин» – органічних сполук, які суттєво відрізняються від води за фізичними властивостями. Математичні моделі цих процесів значно ускладнюються, якщо рідини, що фільтруються, є змішуваними. Далі будуть розглянуті достатньо прості моделі фільтрації двофазної суміші на прикладі суміші «нафта-вода» в припущенні, що рідини є незмішуваними.

Позначимо через S водонасиченість, тобто відношення об'єму пор, заповненого водою, до їхнього загального об'єму. Аналогічно визначається S_n – нафтонасиченість. Тоді $S+S_n=1$. При спільній течії двофазної незмішуваної рідини тиски в кожній з фаз відрізняються. Різниця фазових тисків складає капілярний тиск P_k , який для двофазної течії визначається за формулою Лапласа

$$P_k = P_e + P_n = \alpha \left(\frac{1}{r_e} + \frac{1}{r_n} \right),$$

де r_e та r_n – головні радіуси кривизни поверхні розділу, α – її питома вільна енергія, яка характеризується поверхневим натягом. В пористому середовищі замість чіткої границі поділу двох фаз існує невелика перехідна зона витіснення однієї рідини іншою. Тому величина перепаду тиску P_k залежить від ступеня проникнення однієї з рідин у пористе середовище, заповнене іншою, тобто від насиченості фази, що витісняє. При збільшенні параметра S величина P_k повинна зменшуватись. Для кожної пари рідин можна експериментально визначити функцію Леверетта $J(S)$, яка пов'язана з капілярним тиском

$$P_k(S) = \alpha J(S) \sqrt{\frac{n}{k} \cos \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha}},$$

де α – питома вільна енергія поверхні розділу між однією з рідин і межею пори; n – пористість; κ – проникність пористого середовища.

Для багатозфазних течій у пористому середовищі виконується так званий узагальнений закон Дарсі

$$V_i = -\frac{\kappa}{\mu_i} \bar{\kappa}_i(S) \text{grad} \Phi_i, \quad \Phi_i = P_i + \rho_i g H, \quad (3.68)$$

де V_i – компоненти швидкості фільтрації; $\bar{\kappa}_i$ – відносні фазові проникності, що визначаються експериментально як функції насиченості S тієї фази, що витісняє; μ – динамічна в'язкість; Φ – потенціал; ρ – густина; H – напір. На рис. 3.18 наведені типові криві $\bar{\kappa}_i$, одержані для нафти і води. Аналіз графіків свідчить, що існують граничні ненульові значення насиченості кожної фази $S_{ост}$, при яких проникність дорівнює нулю. Це остаточно водопо- та нафтонасиченості. Якщо $S < S_{ост}$, то ця фаза існує у вигляді окремих осередків, не пов'язаних між собою. Для кожної з фаз окремо формулюється рівняння нерозривності

$$n \frac{\partial S}{\partial t} + \text{div} \vec{V} = 0, \quad (3.69)$$

записане для нестискуваних рідин.

Досить поширеним є випадок, коли витіснення відбувається за умов значного переважання градієнта середнього тиску над градієнтом капілярного тиску. Тоді процес можна описати достатньо простою моделлю Баклі-Левеверетта, в якій капілярні ефекти враховуються лише кривими фазових проникностей $\bar{\kappa}_i$. У рамках цієї моделі сумарна швидкість фільтрації суміші води та нафти для одновимірної течії записується у вигляді

$$u = -\left(\frac{\kappa}{\mu_g} \bar{\kappa}_g + \frac{\kappa}{\mu_n} \bar{\kappa}_n \right) \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (3.70)$$

З виразу (3.70) можна знайти швидкість фільтрації води

$$u_g = -\frac{\kappa}{\mu_g} \bar{\kappa}_g(S) \frac{\partial P}{\partial x} = u \frac{\bar{\kappa}_g(S)/\mu_g}{\bar{\kappa}_g(S)/\mu_g + \bar{\kappa}_n(S)/\mu_n} = u f(S), \quad (3.71)$$

де $f(S)$ – функція Баклі-Леверетта. Кожна з фаз займає лише певну частину порового простору, тому рівняння нерозривності для води записується у вигляді

$$\frac{\partial u_s}{\partial x} = -n \frac{\partial S}{\partial t},$$

звідки

$$u \frac{\partial f(S)}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial x} + n \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (3.72)$$

Оскільки рівняння (3.72) є нелінійним, для його розв'язання зробимо таке. Для площини, де насиченість S є постійною, $dS/dt=0$, тоді

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{u}{n} \frac{\partial f(S)}{\partial S}. \quad (3.73)$$

Друге співвідношення (3.73) також називається рівнянням Баклі-Леверетта. Проінтегрувавши його за часом, одержимо

$$x - x_0 = \frac{ut}{n} \frac{\partial f(S)}{\partial S}, \quad (3.74)$$

де x та x_0 – поточна та початкова координати площини розділу двох фаз; ut – повний об'єм рідини, що проникла до пористого середовища, віднесений до одиниці площі поперечного перетину.

Для кожного значення насиченості можна обчислити її положення x та момент t , коли воно буде досягнуто. Оскільки $x-x_0$ пропорційно $f'(S)$, то графік розподілу насиченості фази, що витісняє, буде подібним до $f'(S)$ (див. рис. 3.19). Графік розподілу S показує, що кожному значенню $x-x_0$ відповідає два значення насиченості. Для усунення неоднозначності вводиться припущення щодо існування стрибка насичення. Значення S_ϕ на фронті фази, що витісняє, можна розрахувати таким чином. Величина об'єму рідини, що витісняє, віднесена до одиниці площі поперечного перетину, визначається як інтеграл

$$ut = n \int_0^{x_1} S(x, t) dx, \quad (3.75)$$

де x_1 – координата стрибка насичення. Продиференціювавши (3.74) по S , ($dx=[ut/nf''(S)]dS$) та підставивши його до (3.75), одержимо

$$ut = \int_{S=1}^{S_\phi} S(x,t) f''(S) dS = ut \{ [S_\phi f'(S_\phi) - f(S_\phi)] - [f'(1) - f(1)] \}. \quad (3.76)$$

Оскільки $f(1)=1, f'(1)=0$ (див. також рис.3.18), то

$$f'(S_\phi) = \frac{f(S_\phi)}{S_\phi} \quad (3.77)$$

З (3.77) знаходиться насиченість на стрибку, а з рівняння (3.74) – положення стрибка в заданий момент часу t . Такий спосіб розрахунку S забезпечує однозначність результатів.

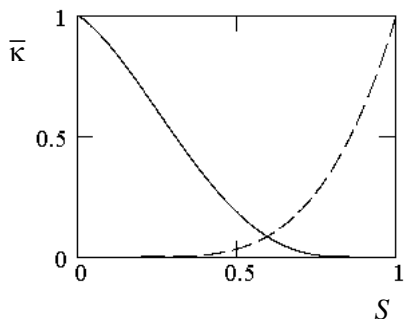


Рис. 3.18. Відносні фазові проникності нафти (—) та води (- - -) [3.15]

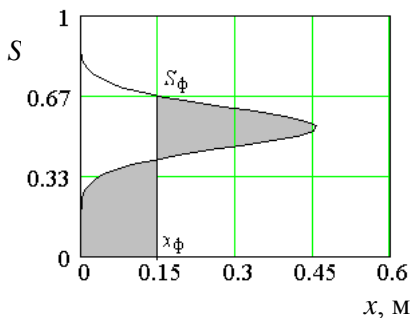


Рис. 3.19. Положення фронту витісняючої фази (заштриховані площі однакові)

При невеликих швидкостях витіснення потрібно врахувати капілярні сили, що можна зробити за допомогою рівняння Маскета-Леверетта

$$n \frac{dS}{dt} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(f(S) K_g P'_k(S) \frac{\partial S}{\partial x} \right) = 0, \quad (3.78)$$

де $K_g = \kappa \bar{k}_g(S) / \mu_g$.

ПИТАННЯ ТА ВПРАВИ ДО РОЗДІЛУ

1. У чому полягає різниця між кривими гранулометричного складу ґрунтів, зображених на рис. 3.1? Визначити для них d_{10} та показник однорідності ζ .
2. Чому дорівнює максимальна вологоємність ґрунту: а) його пористості, б) активній пористості, в) дефіциту насичення?
3. Дійсна швидкість течії рідини в порах більше чи менше швидкості фільтрації? Чому?
4. Якій швидкості фільтрації відповідає течія в пористому середовищі з $d_{10}=0,1$ мм, якщо $Re = 1; 100$?
5. Визначити коефіцієнт фільтрації за формулами табл. 3.1 для ґрунтів, гранулометричний склад яких зображено на рис. 3.1. Який з результатів є ближчим до значень $K_1=16$ м/добу та $K_2=105$ м/добу, встановлених експериментально?
6. Для ґрунтів, гранулометричний склад яких зображено на рис. 3.1, вказати діапазон швидкостей фільтрації, в якому справедливий закон Дарсі.
7. Вивести одновимірне рівняння безнапірної фільтрації на похилому водоупорі, форма якого задається прямою $b(x) = \pm ax$, де $a = \operatorname{tg}\alpha$, α – малий кут нахилу водоупору.
8. Оцінити об'єм перетікання підземних вод через слабопроникний прошарок (товщиною $m_0=5$ м та $K_0=10^{-4}$ м/добу) до нижнього водоносного шару, якщо на площі 20 га середній перепад рівнів у водоносних шарах сягає близько 15 м.
9. Визначити дальність просування фронту забруднених вод за 1 рік, якщо градієнт потоку дорівнює 0.01, коефіцієнт фільтрації – 5 м/добу, активна пористість – 0,2.
10. Через який час активність Sr-90 буде складати 1 % від початкової ($T_{0,5}=29$ років)?
11. За яких умов задачу масопереносу в підземних водах можна розв'язувати окремо від задачі фільтрації?
12. За яких умов можливо застосувати двовимірні моделі фільтрації та масопереносу?
13. На якій відстані від свердловини дебітом 100 м³/добу зниження рівня підземних вод не перевищують 0.1 м; 0.5 м, якщо провідність водоносного шару $Km=25$ м²/добу? Обчислення виконати за формулою (3.41).

14. Яким буде максимальний підйом рівня ґрунтових вод після короткочасного витоку води об'ємом 1000 м^3 на площі 200 м^2 , якщо дефіцит насичення ґрунтів над рівнем ґрунтових вод дорівнює 0,2? Обчислення виконати за формулою (3.49).
15. Визначити час початку надходження забруднених вод у відкачну свердловину (рис. 3.14 б, формула (3.51)). Її дебіт $Q=100 \text{ м}^3/\text{добу}$, початкове положення фронту забруднених вод 300 м вище за потоком від свердловини, середня глибина потоку $m=15 \text{ м}$, пористість 0,2, швидкість фільтрації незбуреного потоку $0.03 \text{ м}/\text{добу}$.
16. У чому полягає нелінійність математичної моделі вологопереносу?
17. Як перейти від рівняння Річардса до рівняння вологопереносу відносно тиску, потенціалу, вологості?
18. Чому площі заштрихованих фігур на рис. 3.18 повинні бути однаковими?

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна

- 3.1. **Аравин В. И., Нумеров С. Н.** Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. М.: Гостехиздат, 1953, 616 с.
- 3.2. **Арье А. Г.** Физические основы фильтрации подземных вод. М.: Недра, 1984, 101 с.
- 3.3. **Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.** Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972, 288 с.
- 3.4. **Бочевер Ф. М., Лапшин Н. Н., Орадovская А. Е.** Защита подземных вод от загрязнения. М.: Недра, 1979, 224 с.
- 3.5. **Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С.** Физико-математические основы фильтрации воды. М.: Мир, 1971. 452 с.
- 3.6. **Голубев В. С., Гарибянц А. А.** Гетерогенные процессы геохимической миграции. М.: Недра, 1968. 192 с.
- 3.7. **Коллинз Р.** Течения жидкостей через пористые материалы. М.: Мир, 1964. 351 с.
- 3.8. **Левицький Б. Ф., Лещій Н. П.** Основи підземної гідравліки. Л.: Вид-во Львівського держ. ун-ту, 1958, 230 с.

- 3.9. **Лукнер Л., Шестаков В. М.** Моделирование миграции подземных вод. М.: Недра, 1986. 208 с.
- 3.10. **Лыков А. В.** Теплообмен (справочник). М.: Энергоиздат, 1975. 561 с.
- 3.11. **Полубаринова-Кочина П. Я.** Теория движения грунтовых вод. М.: Гостехтеориздат, 1952. 676 с.
- 3.12. **Пыхачев Г. Б., Исаев Р. Г.** Подземная гидравлика. М.: Недра, 1972. 360 с.
- 3.13. **Силин-Бекчурин А. И.** Динамика подземных вод. М.: МГУ, 1965. 380 с.
- 3.14. **Ситников А. Б.** Динамика влаги и солей в почвогрунтах зоны аэрации. К.: Наук. думка, 1986. 152 с.
- 3.15. **Чарный И. А.** Подземная гидрогазодинамика. М.: Гостоптехиздат, 1963. 396 с.

Додаткова

- 3.16. **Беляев Н. Н., Коренюк Е. Д., Хрущ В. К.** Компьютерное моделирование динамики движения и загрязнения подземных вод. Д.: Наукa и образование, 2001, 156 с.
- 3.17. **Веригин Н. Н., Васильев С. В., Куранов Н. П.** и др. Методы прогноза солевого режима грунтов и грунтовых вод. М.: Колос, 1979. 336 с.
- 3.18. **Веригин Н. Н.** О гравитационно-упругом режиме фильтрации // Тр. ин-та ВОДГЕО. М.: Вып. 22, 1969. С. 6–17.
- 3.19. Гидрогеологические исследования за рубежом / Под ред. Н. А. Маринова. М.: Недра, 1982. 428 с.
- 3.20. Гидродинамические и физико-химические свойства горных пород / Н. Н. Веригин, С. В. Васильев, В. С. Саркисян и др. М.: Недра, 1977. 271 с.
- 3.21. Изотермическое передвижение влаги в зоне аэрации. Пер с англ. Л.: Гидрометеиздат, 1972. 169 с.
- 3.22. **Коновалов А. Н.** Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Н.: Наука, 1988. 166 с.
- 3.23. **Лаврик В. И., Фильчакова В. П., Яшин А. А.** Конформные отображения физико-топологических моделей. К.: Наук. думка, 1990. 376 с.
- 3.24. **Лялько В. И.** Теплообмен в литосфере. К.: Наук. думка, 1985. 132 с.
- 3.25. **Лялько В. И.** Методы расчета тепло- и массопереноса в земной коре. К.: Наук. думка, 1974. 132 с.

- 3.26. **Ляшко И. И., Сергиенко И. В., Мистецкий Г. Е., Скопецкий В.В.** Вопросы автоматизации решения задач фильтрации на ЭВМ. К.: Наук. думка, 1977. 288 с.
- 3.27. **Олейник А. Я., Поляков В. Л.** Дренаж переувлажненных земель. К.: Наук. думка, 1987. 280 с.
- 3.28. **Полубаринова-Кочина П. Я., Пряжинская В. Х., Эмих В. И.** Математические методы в вопросах орошения. М.: Наука, 1968. 414 с.
- 3.29. Проектирование водозаборов подземных вод / А. И. Арцев, Ф. М. Бочеввер, Н. Н. Лапшин и др. М.: Стройиздат, 1976. 292 с.
- 3.30. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР. М.: Наука, 1969. 545 с.
- 3.31. **Рудаков В. К.** Охрана территорий при гидротехническом и мелиоративном строительстве. К.: Урожай. 1987, 104 с.
- 3.32. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
- 3.33. Справочное руководство гидрогеолога. Л.: Недра, 1967. Т.2, 360 с.
- 3.34. **Усенко В. С.** Вопросы теории фильтрационных расчетов дренажных и водозаборных скважин. М.: Колос, 1968. 301 с.
- 3.35. Физика почвенных вод. М.: Наука; 1981. 207 с.
- 3.36. **Фильчаков П. Ф.** Теория фильтрации под гидротехническими сооружениями. К.: Изд-во АН УССР, 1959. Т.1, 308 с.
- 3.37. **Фрид Ж.** Загрязнение подземных вод. М.: Недра, 1981. 304 с.
- 3.38. **Хэнкс Р. Дж., Ашкрофт Дж. Л.** Прикладная физика почв. М.: Гидрометеоиздат, 1985. 152 с.
- 3.39. **Шаманский В. Е.** Численное решение задач фильтрации грунтовых вод на ЭЦВМ. К.: Наук. думка, 1969. 375 с.
- 3.40. **Van-Genuchten M. Th.** A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils // Soil Sci. Soc. Am. Journ., 44, 1980. P. 892–898.

4. ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ

4.1. РОЗРАХУНОК ЗОНИ РОЗСПОВАННЯ ДОМІШКИ В АТМОСФЕРІ НАВКОЛО ТОЧКОВОГО СТАЦІОНАРНОГО ВИКИДУ

Опис процесу

У точці з координатами $(0,0)$ на висоті h відбувається постійний викид шкідливої газоподібної домішки інтенсивністю q , г/с (рис. 4.1). Напрямок вітру співпадає з напрямком осі Ox . Процес стаціонарного переносу описується рівнянням дифузії (1.65). Домішка розсіюється в результаті дифузії. Її концентрація зменшується також унаслідок розпаду, параметр якого σ . Вона не поглинається поверхнею землі, а швидкість її осадження w_s дорівнює нулю.

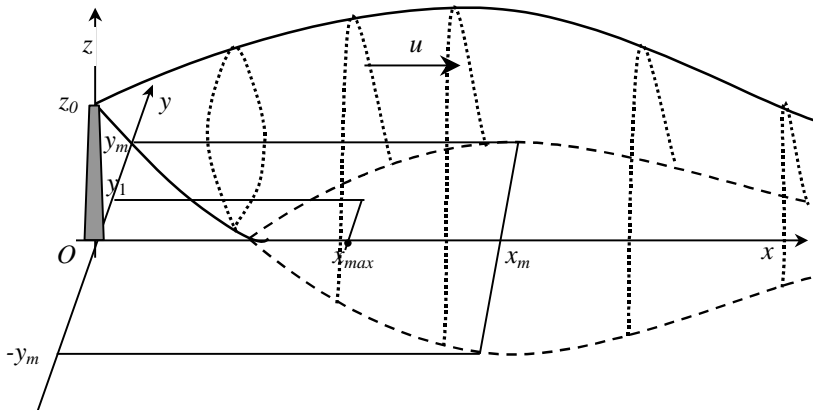


Рис. 4.1. Схема розсіювання домішки

Розрахункові формули

Розподіл приземної концентрації домішки в розглянутому випадку може бути розрахований за допомогою моделі гаусового розсіювання (формула Сеттона (1.60), в якій прийнято $\sigma_y^2 = 2D_y x$, $\sigma_z^2 = 2D_z x$):

$$\varphi(x, y) = \frac{q e^{-\sigma x/u}}{2\pi\sqrt{D_y^* D_z^*} u x} \exp\left(-\frac{h^2}{4D_z^* x} - \frac{y^2}{4D_y^* x}\right), \quad (4.1)$$

де $D_y^* = D_y / u$, $D_z^* = D_z / u$;

чи за допомогою дифузійної моделі

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{8\pi D} e^{\frac{ux}{2D}} \left[\frac{e^{-\beta\rho_1}}{\rho_1} + \frac{e^{-\beta\rho_2}}{\rho_2} \right], \quad (4.2)$$

$$\rho_{1,2} = \sqrt{(z \mp h)^2 + \frac{D_z}{D} \left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \right]},$$

$$\beta = \sqrt{\frac{u^2 + 4D\sigma}{4DD_z}}, \quad D = D_x = D_y.$$

У першій з них зневажається дифузією вздовж напрямку вітру, тобто вважається, що конвективний перенос домішки в подовжньому напрямку значно перевищує дифузійний. Це припущення справедливе при великих швидкостях вітру. Друга модель враховує дифузію в подовжньому напрямку.

Порядок виконання

1. Побудувати графіки зміни приземної концентрації домішки (при $z=0$) для значень швидкості u_1 і u_2 вздовж напрямку вітру при $y=0$, $y=y_1$, $y=y_2$, зобразивши три криві на одному рисунку. Визначити відстань від місць з максимальною концентрацією (x_{max}) до місця викиду і значення φ в цих точках.
2. Побудувати розподіл приземної концентрації домішки для значень швидкості вітру u_1 і u_2 .
3. Використовуючи отримані карти розподілу концентрації і будуючи графіки зміни концентрації при фіксованих значеннях x , знайти координату x_m , де ширина зони забруднення на рівні землі буде найбільшою. Зону забруднення визначити з умови $\varphi(x, y, 0) > 0.01\varphi_{max}$, де φ_{max} – максимальна концентрація на прямій $y=0$, обчислена в пункті 1. Таким чином, потрібно знайти y_m , що б при $|y| < y_m$ виконувалася нерівність $\varphi(x_m, y, 0) > 0.01\varphi_{max}$.

4. Дослідити вплив параметра розпаду, виконавши розрахунки при $\sigma=\sigma_1$ і $\sigma=\sigma_2$.

Параметри розрахунку

$u_1=0.25+j/10$ м/с, $u_2=5+j/5$ м/с, $D=D_x=D_y=k \cdot u$ м²/с, $k=0.4$ м,
 $D_z=0.5$ м²/с; $y_1=20$ м, $y_2=50$ м; $\sigma_1=10^{-5}$ с⁻¹, $\sigma_2=10^{-4}$ с⁻¹; $q=10^2$ г/с;
 $h=30+j$ м.

Тут j – номер студента в списку журналу групи; D_x обчислюється в залежності від швидкості вітру u . При парному j використовувати формулу (4.1), при непарному – (4.2).

Звіт про виконану роботу повинен включати:

- 1) коротке формулювання задачі при конкретних значеннях параметрів;
- 2) графічне зображення і словесний опис зони розсіювання домішки на рівні землі (довжина, максимальна ширина, положення максимуму, значення φ_{max});
- 3) аналіз впливу розпаду і швидкості вітру на положення і характеристики зони розсіювання домішки на рівні землі, визначені в пункті 2 звіту.

4.2. РОЗРАХУНОК ПЕРЕНОСУ Й ОСАДЖЕННЯ ВАГОМОЇ ДОМІШКИ В АТМОСФЕРІ ПІСЛЯ МИГТЄВОГО ВИКИДУ

Опис процесу

У точці з координатами (0, 0) на висоті h у момент часу $t_0=0$ відбувся викид вагової домішки (пилу) масою M_0 . Хмара переноситься вітром, осідаючи на поверхню землі. Вісь Ox сполучена з напрямком вітру (рис. 4.2). За умов сталості параметрів атмосфери процес нестационарного переносу може бути описаний рівнянням (1.41) з постійними коефіцієнтами. Траєкторія центра хмари показана точками A_1, A_2, A_3 . У загальній масі пилу містяться частинки різної ваги та швидкості осідання. Позначимо через p_1 частку легких частинок зі швидкістю осідання w_1 , p_2 –

частку середніх частинок зі швидкістю осідання w_2 , p_3 – частку важких частинок зі швидкістю осідання w_3 ; при цьому $p_2+p_3+p_3=1$. Пил не піддається фізико-хімічним перетворенням, тому швидкість його розпаду дорівнює нулю ($\sigma=0$). Швидкість поглинання пилу поверхнею землі λ також прийнята рівною нулю.

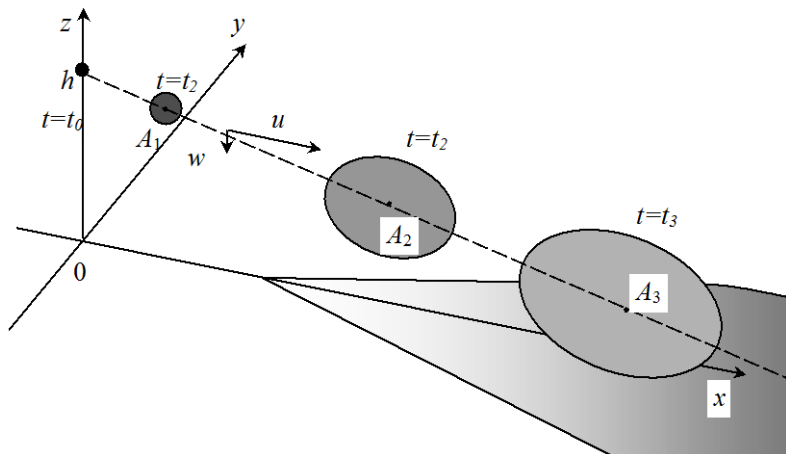


Рис. 4.2. Схема розсіювання й осідання хмари вагової домішки після миттєвого викиду

Розрахункові формули

Розподіл концентрації домішки над поверхнею землі після викиду пилу масою M_0 у точці $(0, 0, h)$, може бути описаний формулою

$$\varphi(x, y, z, t) = M_0 \varphi_x(x, t) \varphi_y(y, t) \varphi_z(z, t), \quad (4.3)$$

$$\varphi_x(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D_x t}} \exp\left\{-\frac{(x-ut)^2}{4D_x t}\right\},$$

$$\varphi_y(y, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D_y t}} \exp\left\{-\frac{y^2}{4D_y t}\right\},$$

$$\varphi_z(z, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D_z t}} \exp\left(-\frac{w_s(z-h)}{2D_z}\right) \left\{ \exp\left(-\frac{(z-h)^2}{4D_z t}\right) + \exp\left(-\frac{(z+h)^2}{4D_z t}\right) - \alpha\sqrt{\pi D_z t} \exp\left(-\frac{(z+h)^2}{4D_z t}\right) \Phi\left(\frac{z+h+\alpha D_z t}{2\sqrt{D_z t}}\right) \right\},$$

де $\Phi(\xi) = e^{\xi^2} \operatorname{erfc}(\xi)$, $\alpha = w_s / 2D_z$, w_s – швидкість осідання частинок пилу. При $\xi > 5$ для $\Phi(\xi)$ зручніше скористатися наближенням $\Phi(\xi) \approx (1 - 1/2\xi^2) / (\sqrt{\pi}\xi)$, отриманим на основі асимптотичного розкладу функції $\operatorname{erfc}(\xi)$ при великих значеннях аргументу.

Для різномірного складу пилу, що містить n фракцій, одержимо

$$\varphi_{\Sigma}(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^n p_i \varphi_i(x, y, z, t, w_i), \quad (4.4)$$

де p_i – частка частинок пилу зі швидкістю осадження w_i , φ_i – їхня концентрація.

Маса домішки M_t , що осіла за період часу протягом t після моменту викиду на поверхню землі в точці (x, y) , визначається за формулою

$$M_t(x, y, t) = \sum_{i=1}^n w_i p_i \int_0^t \varphi_i(x, y, 0, t, w_i) dt. \quad (4.5)$$

Порядок виконання

1. Побудувати розподіл концентрації окремих фракцій пилу та її сумарної концентрації на рівні землі в моменти часу t_1 , t_2 і t_3 .
2. Побудувати розподіл маси домішки, що осіла на поверхню землі за весь час після викиду (прийняти, що верхня межа інтегрування у формулі (4.5) дорівнює ∞ чи великому числу).
3. Дослідити вплив швидкості осадження, виконавши розрахунки для різних складів пилу – А і В.

Параметри розрахунку

$u=2+j/5$ м/с; $D_x=D_y=k$ и $\text{м}^2/\text{с}$, $k=0.4$, $D_z=0.5$ $\text{м}^2/\text{с}$; $t_1=100$ с,
 $t_2=300$ с, $t_3=1200$ с; $h=(40-j)$ м, $M_0=100$ кг.

Тут j – номер студента в списку журналу групи.

Склад пилу	w_1	p_1	w_2	p_2	w_3	p_3
А	0.03	0.45	0.15	0.4	0.3	0.15
В	0.01	0.5	0.05	0.45	0.1	0.05

Звіт про виконану роботу повинен включати:

- 1) коротке формулювання задачі при конкретних значеннях параметрів;
- 2) графічне зображення і словесний опис зони забруднення та її динаміки: зміна з часом, положення точки з максимальною концентрацією, розміри хмари, визначені з умови $\varphi(x, y, t) > 0.01\varphi_{\max}(t)$, де $\varphi_{\max}(t)$ – максимальна приземна концентрація пилу в момент t ;
- 3) аналіз впливу складу пилу на характеристики зони забруднення і розподіл маси осілої домішки.

4.3. РОЗРАХУНОК ЗАБРУДНЕННЯ РІКИ ПІСЛЯ РАЗОВОГО СКИДАННЯ СТИЧНИХ ВОД

Опис процесу

У невелику річку скидаються стічні води протягом Δt хвилин об'ємом W_s (м^3) середньою мінералізацією φ_s (г/л). Слабозвивисте русло ріки має трапецеїдальний перетин (рис. 4.3), і характеризується такими усередненими параметрами: B – ширина русла на рівні поверхні, h – глибина, α – кут укосу берега, I – похил поверхні води, n – шорсткість русла. Вважається, що в руслі має місце рівномірний усталений рух. Передбачається, що в початковому створі $x=0$ відбувається повне перемішування річкових і стічних вод, а мінералізація φ осереднюється за всім перетином ріки нижче за течією. Потрібно визначити динаміку зони з підвищеною мінералізацією і зміну рівня забруднення річкової води з часом.

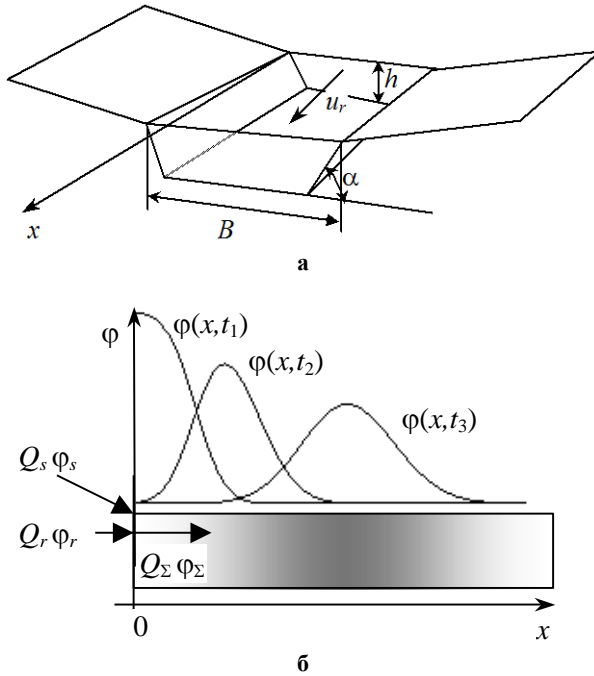


Рис. 4.3. Схема русла (а), змішування і переносу стічних вод (б)

Розрахункові формули

Витрата води в річці і швидкість течії до місця скидання стічних вод визначаються за формулами:

$$Q_r = \omega C \sqrt{RI} = \omega u_r, \quad u_r = C \sqrt{RI}, \quad (4.6)$$

де ω – площа живого перетину, C – коефіцієнт Шезі, R – гідравлічний радіус, I – похил поверхні води. Для русла трапецеїдального перетину ω і R розраховуються за формулами (див. табл. 2.2):

$$\omega = (b + mh)h, \quad R = \omega / \chi, \quad \chi = b + 2h\sqrt{1 + m^2}, \quad m = \text{ctg}\alpha,$$

де b – ширина русла на рівні дна, $b = B - 2mh$; коефіцієнт Шезі можна обчислити за формулою Павловського $C = R^y / n$.

Обчисливши витрату в річці під час скидання $Q_\Sigma = Q_r + Q_s$, ($Q_s = W_s / \Delta t$) можна оцінити відповідну йому максимально мож-

ливу швидкість течії u_{max} , вважаючи, що площа перетину ω при скиданні практично не змінюється: $u_{max} = Q_{\Sigma}/\omega$.

Розрахунок підвищення мінералізації над її фоновим значенням φ_r виконується за формулою:

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\Delta\varphi_{\Sigma}}{2} \exp\left(\frac{x(u-\lambda)}{2D_x}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x-ut}{2\sqrt{D_x t}}\right), & 0 < t < \Delta t, \\ \frac{\Delta\varphi_{\Sigma}}{2} \exp\left(\frac{x(u-\lambda)}{2D_x}\right) \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x-ut}{2\sqrt{D_x t}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{x-ut_1}{2\sqrt{D_x t_1}}\right) \right], & t > \Delta t, \end{cases} \quad (4.7)$$

де $\Delta\varphi_{\Sigma}$ – перевищення мінералізації води після перемішування над її фоновим значенням у річці до місця скидання, $\Delta\varphi_{\Sigma} = \varphi_{\Sigma} - \varphi_r$; D_x – коефіцієнт подовжньої дисперсії, K_1 – коефіцієнт неконсервативності забруднюючих речовин, що враховує їхнє зменшення за рахунок фізико-хімічних перетворень; $\lambda = \sqrt{u^2 + 4K_1 D_x}$; $t_1 = t - \Delta t$. Величини φ_{Σ} і D_x визначаються так:

$$\varphi_{\Sigma} = (Q_r \varphi_r + Q_s \varphi_s) / Q_{\Sigma}, \quad D_x = 21.3(0.305 u / \ln(B/h))^{0.269}. \quad (4.8)$$

Порядок виконання

1. Обчислити гідравлічні параметри: витрати Q_r і Q_{Σ} , швидкості течії u_r і u_{max} ; знайти різницю між u_{max} і u_r .
2. Побудувати графік зміни мінералізації в річковій воді вниз за течією в моменти часу t_1 , t_2 , t_3 , зобразивши криві на одному малюнку. Знайти положення максимумів мінералізації води і їхніх значень.
3. Визначити довжину початкової ділянки ріки L_{max} , у межах якої мінералізація може перевищити гранично допустиме значення $\varphi_{ГДК}$.
4. Визначити координату x_2 нижче за течією від місця скидання, починаючи з якої перевищення мінералізації над її фоновим значенням φ за весь час не перевищить $0.2 \Delta\varphi_{\Sigma}$ і знайти тривалість цього періоду.
5. Обчислити L_{max} і x_2 (пункти 3, 4), якщо збільшити час скидання Δt у 1.5 рази.

Пункти 2 – 5 виконувати при незбуреній швидкості течії в річці u_r .

Параметри розрахунку

$\alpha = (25+j)^\circ$, $n=0.08$, $y=0.34$, $h=5+j/5$ м, $B=(70+j)$ м, $I_0=0.00001$,
 $W_s=(10000+200 \cdot j)$ м³, $\Delta t_1=60$ хв, $\Delta t_2=90$ хв, $t_1=60$ хв, $t_2=120$ хв,
 $t_3=240$ хв; $\varphi_s=80$ г/л, $\varphi_r=0.2$ г/л, $\varphi_{ГДК}=1.5$ г/л, $K_1=0.02$ діб⁻¹.
Тут j – номер студента в списку журналу групи.

Звіт про виконану роботу повинен включати:

- 1) коротке формулювання задачі при конкретних значеннях параметрів;
- 2) значення витрат Q_r , Q_Σ , і швидкостей течії v_r , v_{max} при $\Delta t = \Delta t_1$.
- 3) таблицю з визначеними в пунктах 2–5 параметрами (положення максимумів мінералізації і величини L_{max} і x_{min} , знайдені при $\Delta t = \Delta t_1$ та $\Delta t = \Delta t_2$);
- 4) аналіз результатів.

4.4. РОЗРАХУНОК ЗАБРУДНЕННЯ РІКИ ПРИ ПОСТІЙНОМУ СКИДАННІ СТИЧНИХ ВОД

Опис процесу

У річку зі слабозвивистим руслом середньою шириною B і середньою глибиною h постійно скидаються стічні води на відстані b_s від берега. У прийнятій схемі (рис. 4.4) вісь Ox спрямована вниз за течією, вісь Oy – перпендикулярно до неї. Витрата стічних вод дорівнює Q_0 , концентрація забруднюючої речовини в них – φ_0 , а в річці вище місця скидання – φ_r . Вважається, що процес переносу стаціонарний, витрата стічних вод незначна у порівнянні з витратою води в річці, а в результаті вертикального перемішування домішки її концентрацію можна осереднити по глибині.

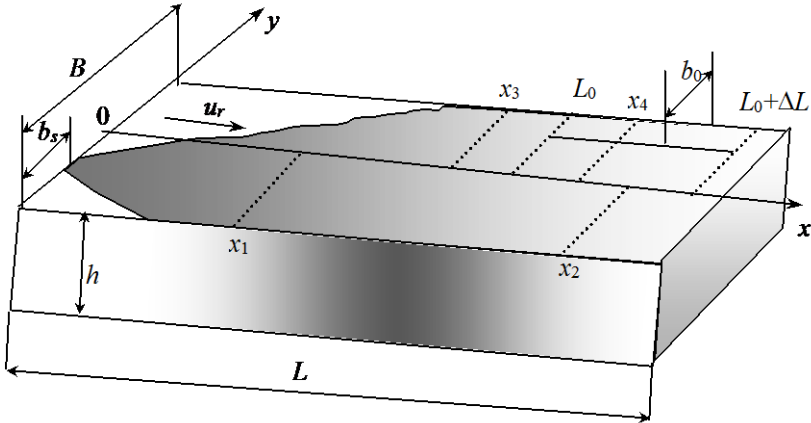


Рис. 4.4. Схема скидання і перемішування стічних вод у руслі ріки

Розрахункові формули

Витрата води в річці і швидкість течії визначаються за формулами:

$$Q_r = \omega C \sqrt{RI} = \omega u_r, \quad u_r = C \sqrt{RI}, \quad (4.9)$$

де ω – площа живого перетину, C – коефіцієнт Шезі, R – гідравлічний радіус, I – похил водної поверхні. Вважаючи, що русло має прямокутний перетин, величини ω і R можна обчислити так (див. табл. 2.2)

$$\omega = Bh, \quad R = \omega/\chi, \quad \chi = B + 2h.$$

Коефіцієнт Шезі визначається за формулою Павловського $C = R^y/n$.

Концентрація забруднюючої речовини на ділянці русла $x > 0$ визначається за формулою

$$\varphi = \varphi_r + \frac{(\varphi_0 - \varphi_r) Q_0}{H \sqrt{\pi u_r D_y x}} \frac{\exp\left(-\frac{(y + B/2 - b_s)^2 u_r}{4 D_y x} - K_1 \frac{x}{u_r}\right)}{\operatorname{erf}\left(\frac{B \sqrt{u_r}}{2 \sqrt{D_y x}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{(B - b_s) \sqrt{u_r}}{2 \sqrt{D_y x}}\right)}, \quad (4.10)$$

де D_y – коефіцієнт поперечної дифузії, що визначається за формулою (див. табл. 2.5)

$$D_y = \frac{u_r h}{3524} \left(\frac{B}{h} \right)^{1.378} \quad (4.11)$$

Вважається, що дифузія в подовжньому напрямку значно менша за конвективний перенос, тому в цій моделі прийнято $D_x=0$.

Порядок виконання

1. Обчислити витрату Q , і швидкість течії u_r .
2. Побудувати карту розподілу концентрації забруднюючої речовини на ділянці русла ріки $|y| \leq B/2$, $0 < x \leq L$ при $b_s = b_1$.
3. Визначити ділянки на берегах ріки з перевищенням гранично допустимої концентрації (ГДК) забруднюючої речовини $([x_1, x_2], [x_3, x_4])$, де $\varphi(x, \pm B/2) > \varphi_{ГДК}$. Розрахунок виконати при двох варіантах розташування місця скидання від берега $b_s = b_1$ і $b_s = b_2$.
4. Визначити середню концентрацію забруднюючої речовини φ_s на ділянці найближчої зони відпочинку довжиною ΔL , що знаходиться на відстані L_0 нижче за течією від місця скидання, прийнявши $b_s = b_1$. Для розрахунку φ_s можна використовувати співвідношення

$$\varphi_s = \frac{1}{2\Delta L} \int_{L_0}^{L_0+\Delta L} [\varphi(x, B/2) + \varphi(x, B/2 - b_0)] dx,$$

де b_0 – ширина частини русла, що відноситься до зони відпочинку.

Параметри розрахунку

$B=70$ м, $n=0.05$, $y=0.24$, $I_0=0.00001$, $H=3+(j-1)/5$ м, $b_1=2 \cdot (j-1)$ м,
 $b_2=10+2 \cdot (j-1)$ м, $Q_0=2$ м³/с, $\varphi_s=20$ г/л, $\varphi_r=0.0001$ г/л,
 $\varphi_{ГДК}=0.002$ г/л, $K_1=0.01$ днів⁻¹, $L=20000$ м, $L_0=2000$ м, $\Delta L=1500$ м,
 $b_0=10$ м. Тут j – номер студента в списку журналу групи.

Звіт про виконану роботу повинен включати:

- 1) коротке формулювання задачі при конкретних значеннях параметрів;
- 2) значення витрати Q_r і швидкості течії u_r ;
- 3) таблицю з визначеними в пунктах 2–4 параметрами;
- 4) аналіз впливу розташування місця скидання на розподіл концентрації в руслі.

4.5. РОЗРАХУНОК ПІДЙОМУ ГРУНТОВИХ ВОД ПОБЛИЗУ ВОДОВІДСТІЙНИКА

Опис процесу

Починаючи з моменту влаштування водовідстійника через його днище у верхній водоносний шар витікають шламові води з постійною інтенсивністю ϵ . Контур водовідстійника можна апроксимувати декількома прямокутними ділянками. В результаті витоків відбувається зміна природного потоку ґрунтових вод, спрямованого до ріки (рис. 4.5).

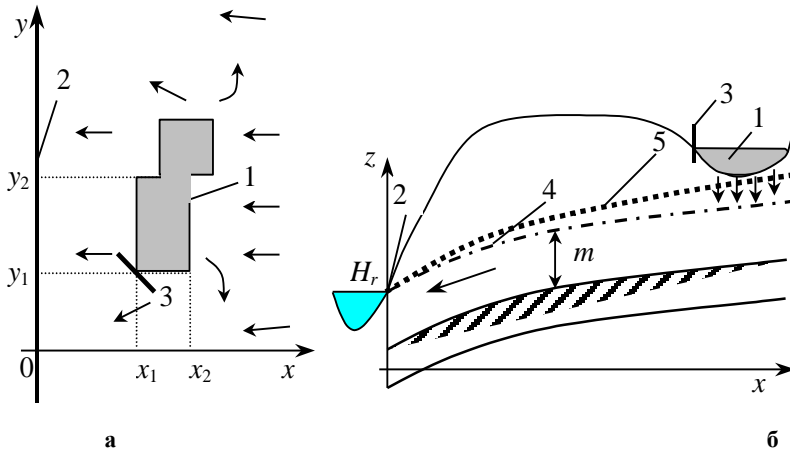


Рис. 4.5. Схема фільтрації шламових вод:

- а) положення водовідстійника; б) вертикальний розріз;
1 – водовідстійник, 2 – уріз ріки, 3 – перегороджуюча гребля,
4 – природний рівень ґрунтових вод, 5 – їхній підвищений рівень

На границі водоносного шару підтримується постійний рівень, що дорівнює рівню води в річці H_r . Середня глибина потоку ґрунтових вод m , коефіцієнт фільтрації порід водоносного шару K , їхня пористість – n . Вважається, що перетік до нижнього водоносного шару відсутній. Потрібно визначити зміну рівня ґрунтових вод поблизу водовідстійника з часом.

Розрахункові формули.

Рівень ґрунтових вод H розраховується за формулою

$$H(x, y, t) = H_0(x) + \Delta h(x, y, t), \quad (4.12)$$

де H_0 – рівень ґрунтових вод до влаштування водовідстійника, Δh – підвищення їхнього рівня, спричинене витоками. Величина Δh визначається підсумовуванням впливу всіх ділянок водовідстійника, де відбувається виток

$$\Delta h = \sum_{i=1}^m \Delta h^{(i)},$$

а підвищення рівня для окремої прямокутної ділянки з координатами $[x_{1,i}, x_{2,i}] \times [y_{1,i}, y_{2,i}]$ – за формулою

$$\Delta h^{(i)}(x, y, t) = \frac{\varepsilon t}{4n} \int_0^1 S_x^i(x, t\theta) \cdot S_y^i(y, t\theta) d\theta \quad (4.13)$$

$$S_x^i(x, t) = \operatorname{erf}\left(\frac{x - x_{1,i}}{2\sqrt{at}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x - x_{2,i}}{2\sqrt{at}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x + x_{1,i}}{2\sqrt{at}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{x + x_{2,i}}{2\sqrt{at}}\right),$$

$$S_y^i(y, t) = \operatorname{erf}\left(\frac{y - y_{1,i}}{2\sqrt{at}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{y - y_{2,i}}{2\sqrt{at}}\right),$$

де $a = Km$ – рівнепровідність.

Рівень ґрунтових вод до влаштування водовідстійника можна розрахувати за допомогою параболи Дюпюї

$$H_0(x) = \sqrt{H_r^2 + \frac{x}{L}(H_L^2 - H_r^2)}, \quad (4.14)$$

де H_L – постійний рівень ґрунтових вод, підтримуваний на відстані L від ріки.

Порядок виконання

1. Побудувати ізолінії рівня ґрунтових вод у природному по-тоці (до будівництва водовідстійника), через 5 і 25 років після цього.
2. Побудувати графіки зміни рівня ґрунтових вод у часі в точках, що знаходяться на відстанях $x=500, 1000, 1400$ м від ріки при $y=2000$ м.
3. Визначити максимальне підвищення рівня ґрунтових вод усередині і на відстані 200 м поза контуром водовідстійника через 10, 20, 30 років після його заповнення.
4. Оцінити площу зони, де підвищення рівня ґрунтових вод через 20 років після заповнення водовідстійника перевищить 1 м.

Параметри розрахунку

$H_r=30$ м, $H_L=40$ м, $L=5000$ м, $K=5$ м/добу, $n=0.25$, $m=15+j/5$ м, $\varepsilon=(1+j/8)\cdot 10^{-4}$ м/добу, j – номер студента в списку журналу групи.

Координати прямокутних ділянок, що апроксимують зони витоків:

- 1) $x_1=1500$ м, $x_2=2000$ м, $y_1=1000$ м, $y_2=2000$ м,
- 2) $x_1=1750$ м, $x_2=2250$ м, $y_1=2000$ м, $y_2=2750$ м,
- 3) $x_1=2000$ м, $x_2=2500$ м, $y_1=2750$ м, $y_2=3250$ м.

Звіт про виконану роботу повинен включати:

- 1) коротке формулювання задачі при конкретних значеннях параметрів;
- 2) результати розрахунку параметрів, зазначених в пунктах 1 і 2, у графічній формі, в пунктах 3 і 4 – у табличній формі;
- 3) аналіз результатів.

4.6. РОЗРАХУНОК МІГРАЦІЇ ЗАБРУДНЮЮЧИХ РЕЧОВИН У ПІДЗЕМНИХ ВОДАХ ПОБЛИЗУ ВОДОВІДСТІЙНИКА

Опис процесу

Починаючи з моменту влаштування водовідстійника через його днище у верхній водоносний шар відбувається витік шламових вод, що містять токсичні солі у високих концентраціях (рис. 4.5). Вважається, що через проміжок часу T_1 після влаштування водовідстійника рівень ґрунтових вод стабілізується, а ще через період T_2 після цього починається надходження солей до ґрунтових вод. Розтікання шламових вод і міграція солей йде в різних напрямках, причому найбільш швидко – у бік ріки. Потрібно визначити границі зони забруднення ґрунтових вод на строки прогнозу τ_1 і τ_2 .

Алгоритм розрахунку міграції солей базується на розв'язанні рівняння нестационарного масопереносу розчинної домішки вздовж лінії току фільтраційної течії

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(D_L(\xi) \frac{\partial \varphi(\xi, t)}{\partial \xi} \right) - V(\xi) \frac{\partial \varphi(\xi, t)}{\partial \xi} = n_e \frac{\partial \varphi(\xi, t)}{\partial t}, \quad (4.15)$$

де $\varphi(\xi, t)$ – осереднена по глибині водоносного шару концентрація солей; ξ – криволінійна координата, відлічувана вздовж лінії току; $D_L = \delta_L \cdot V$ – коефіцієнт подовжньої дисперсії; δ_L – параметр подовжньої дисперсії; V – швидкість фільтрації уздовж лінії току; n_e – коефіцієнт ефективної пористості, що враховує оборотну лінійну рівноважну сорбцію в пористому середовищі. Дана математична модель не враховує дисперсію домішки в напрямку, поперечному до потоку, її розпад, а також масопотік солей через верхню і нижню границі водоносного шару.

Розрахункові формули і порядок виконання

Побудова ліній току і розрахунок міграції вздовж них виконуються в такий спосіб.

1. Для кожної лінії току задаються координати початкової точки в декартовій системі координат (x_0, y_0) , і на лінії току

$\xi_0=0$. Для зручності наступних розрахунків збільшення вздовж лінії току $\Delta\xi$ задається незмінним.

2. Нове положення точки на лінії току визначається за формулами:

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= x_i + v_{x,i}\Delta t_i, \quad y_{i+1} = y_i + v_{y,i}\Delta t_i, \\ \Delta t_i &= \Delta\xi/|V_i|, \quad |V_i| = \sqrt{u_i^2 + v_i^2},\end{aligned}\quad (4.16)$$

в яких компоненти швидкості обчислюються згідно з законом Дарсі:

$$u_i = -K \frac{\partial H(x_i, y_i, T_1)}{\partial x}, \quad v_i = -K \frac{\partial H(x_i, y_i, T_1)}{\partial y}, \quad (4.17)$$

де K – коефіцієнт фільтрації, H – рівень ґрунтових вод. Компоненти швидкості зручно обчислювати як скінченні різниці:

$$\begin{aligned}u_i &= -K \frac{H(x_i + \varepsilon, y_i, T_1) - H(x_i, y_i, T_1)}{\varepsilon}, \\ v_i &= -K \frac{H(x_i, y_i + \varepsilon, T_1) - H(x_i, y_i, T_1)}{\varepsilon},\end{aligned}\quad (4.18)$$

де ε – мала відстань (рекомендується $\varepsilon=10^{-3}-10^{-1}$ м). Число точок на лінії току дорівнює N_L , її довжина – L_ξ ($L_\xi=N_L\Delta\xi$).

3. (Виконується, якщо при розв'язанні рівняння (4.15) стандартними засобами необхідно представити $V(\xi)$ і $D_L(\xi)$ у вигляді неперервних функцій). Розрахована в окремих точках швидкість фільтрації апроксимується на проміжку $[0, L_\xi]$ неперервною функцією $V_a(\xi)$, на основі якої визначається функція $D_L(\xi)$. При використанні стандартних засобів у пакетах комп'ютерної математики для такої апроксимації достатньо задати 3–4 точки на однаковому віддаленні одна від одної вздовж лінії току на інтервалі $[0, L_\xi]$.
4. Рівняння (4.15) вирішується на проміжку часу $[0, \tau]$ в інтервалі $[0, L_\xi]$ при початкових і граничних умовах:

$$\varphi(\xi, 0) = \varphi_0, \quad \varphi(0, t) = \varphi_s, \quad \varphi(L_\xi, t) = \varphi_0 \quad (5)$$

за допомогою стандартних засобів чисельного розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних, які наявні в пакетах комп'ютерної математики. Тут φ_s – концентрація солей у ґрунтових водах під водовідстійником, φ_0 – їхня фонова концентрація. Замість $V(\xi)$ і $D_L(\xi)$ до (4.15) підставляються їхні апроксимації неперервними функціями, що були побудовані в попередньому пункті.

5. Після визначення положення точки ξ' на лінії току, в якій концентрація дорівнює гранично допустимій ($\varphi(\xi', \tau) = \varphi_{ГДК}$), знаходиться положення цієї точки в декартовій системі координат (x', y') , що відповідає періоду прогнозу τ .
6. Після виконання розрахунку φ для декількох ліній току в різних напрямках від водовідстійника оцінюються межі зони забруднення на задані періоди прогнозу τ_1 і τ_2 .

Параметри розрахунку.

$\varphi_0 = 0.1$ г/л, $\varphi_s = (10 + j/2)$ г/л, $\varphi_{ГДК} = 0.5$ г/л, $n_e = (0.2 + j/10)$,
 $\delta_L = (4 - j/5)$ м, $T_1 = 10$ років, $T_2 = 5$ років, $\tau_1 = 35$ років, $\tau_2 = 60$ років,
 j – номер студента в списку журналу групи.

Початкові точки ліній току потрібно задавати на контурі водовідстійника; діапазон значень $N_l = 100 \div 400$, $\Delta \xi = 2 \div 5$ м. Вихідні дані для розрахунку рівня ґрунтових вод H необхідно взяти з лабораторної роботи № 5.

Звіт про виконану роботу повинен включати:

- 1) коротке формулювання задачі при конкретних значеннях параметрів;
- 2) результати розрахунку зони забруднення ґрунтових вод у графічній чи табличній формі (дальність міграції в різних напрямках);
- 3) аналіз результатів.

КОРОТКИЙ УКРАЇНО-РОСІЙСЬКИЙ СЛОВНИК ДЕЯКИХ ВИРАЗІВ, ЩО ЗУСТРІЧАЮТЬСЯ В ТЕКСТІ

Випар	Испарение
Витрата рідини	Расход жидкости
Вихідні дані	Исходные данные
Відбита радіація	Отраженная радиация
Віялоподібний	Веероподобный
Водовідстійник (влаштування)	Водоотстойник (оборудование)
Водосховище, водоймище	Водохранилище, водоем
Вологість (вагова, об'ємна)	Влажность (весовая, объемная)
Вологоємність	Влагоемкость
Волочені наноси	Влекомые наносы
Водоносний шар	Водоносный горизонт (слой)
Гідравлічний опір	Гидравлическое сопротивление
Гребля	Дамба
Густина (випромінювання)	Плотность (излучения)
Домішка	Примесь
Донні відкладення	Донные отложения
Живий перетин (переріз)	Живое сечение
Заплава	Пойма
Звивисте русло	Извилистое русло
Завислі наноси	Взвешенные наносы
Оборотна сорбція	Обратимая сорбция
Основа	Основание
Поглинання на поверхні	Поглощение на поверхности
Пористість	Пористость
Похил	Уклон (наклон)
Пружні властивості	Упругие свойства
Прямовисне падіння	Отвесное падение
Пухкі породи	Рыхлые породы
Рівноважний процес	Равновесный процесс
Свердловина	Скважина
Склад забруднення	Состав загрязнения
Слабопроникний прошарок	Слабопроницаемая прослойка
Стисливість рідини	Сжимаемость жидкости
Стрічногрядне відкладання наносів	Ленточногрядное отложение наносов
Струмінь	Струя
Суцільний потік	Сплошной поток
Тяжіння	Притяжение
Умова	Условие
Усталений рух	Установившееся движение
Ухил	Уклонение
Частинка	Частица
Частка	Доля, часть, частица

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ ІЗ ЗАГАЛЬНИХ ТА СПЕЦІАЛЬНИХ ПИТАНЬ ЕКОЛОГІЇ ТА ОХОРОНИ НАВКОЛИШНЬОГО СЕРЕДОВИЩА

1. **Бадяев В. В., Егоров Ю. А., Казаков С. В.** Охрана окружающей среды при эксплуатации АЭС. М.: Энергоиздат. 1990. 224 с.
2. **Беккер А. А., Агаев Т. Б.** Охрана и контроль загрязнения природной среды / Учеб. пособ. Л.: Гидрометеиздат, 1989. 286 с.
3. Введение в химию окружающей среды / Дж. Андруэ, П. Бримблекумб, Т. Джикелз, П. Лисс. Под ред Г. А. Заварзина. М.: Мир, 1999, 271 с.
4. **Владимиров А. М., Ляхин Ю. И., Матвеев Л. Т., Орлов В. Г.** Охрана окружающей среды. Л.: Гидрометеиздат, 1991. 423 с.
5. Вредные вещества в окружающей среде: указатель отечественной и зарубежной литературы / Под ред. В. А. Филова. Л., 1991. 299 с.
6. **Гусев Н. Г., Беляев В. А.** Радиоактивные выбросы в биосфере. Справочник. М.: Энергоатомиздат. 1991. 256 с.
7. **Довгий С. А., Прусов В. А., Копейка О. В.** Использование геоинформационных технологий в системах охраны окружающей среды. К.: Наук. думка, 2000. 284 с.
8. Допустимые выбросы радиоактивных и химических веществ в атмосферу / Е. Н. Теверовский, Н. Е. Артемова, А. А. Бондарев и др. М.: Энергоиздат, 1985. 216 с.
9. **Егоров Ю. А.** Основы радиационной безопасности атомных электростанций. Учеб. пособие для вузов. М.: Энергоиздат. 1982. 272 с.
10. **Еремеев И. С.** Автоматизированные системы радиационного мониторинга окружающей среды. К.: Наук. думка, 1990. 256 с.
11. **Израэль Ю. А.** Экология и контроль состояния природной среды. Л.: Гидрометеиздат, 1984. 560 с.
12. **Колоколов О. В., Хоменко Н. П.** Охрана окружающей среды при подземной разработке месторождений полезных ископаемых / Учеб. пособ. для вузов. К.–Донецк: Вища шк., 1986. 231 с.
13. Контроль химических и биологических параметров окружающей среды: справочник / Под ред. Л. К. Исаева. СПб.: Крисмас+, 1998, 851 с.
14. **Крышев Н. И., Сазыкина И. И.** Имитационные модели динамики экосистем в условиях антропогенного воздействия ТЭС и АЭС. М.: Энергоатомиздат, 1990. 184 с.
15. **Лаврик В. І.** Методи математичного моделювання в екології. Навч. посіб. для вузів. К.: Вид. дім «КМ Академія», 2002. 203 с.

16. **Ливчак И. Ф.** Инженерная защита и управление развитием окружающей среды / Учеб. пособ. для вузов. М.: Колос, 2001. 159 с.
17. Норми радіаційної безпеки України (НРБУ-97): державні гігієнічні нормативи. К., Відділ поліграфії Укр. Центру держсанепіднагляду МОЗ України. 1997. 121 с.
18. **Рамад Ф.** Основы прикладной экологии: воздействие человека на биосферу. Л.: Гидрометеоздат, 1981. 543 с.
19. СанПіН. Вода питна, гігієнічні вимоги до якості води централізованого господарсько-питного водопостачання. Введ. 23.12.1996. К.: Вид-во стандартів, 1996. 24 с.
20. **Семевский Ф. Н., Семенов С. М.** Математическое моделирование экологических процессов. Л.: Гидрометеоздат, 1982. 279 с.
21. Химия окружающей среды / Под ред. Дж. О. М. Бокриса. М.: Химия, 1982. 671 с.
22. Экология горного производства: Учеб. для вузов. М.: Недра, 1991. 320 с.
23. Экологические основы природопользования / Н. П. Грицан, Н. В. Шпак, Г. Г. Шматков, А. Г. Шапарь и др: Под ред. Н.П. Грицан. Д.: ИППЭ НАН Украины, 1998. 409 с.
24. Ядерная энергетика, человек и окружающая среда / Под ред. А. П. Александрова. М.: Энергоиздат. 1981. 294 с.
25. **Яцык А. В.** Экологические основы рационального водопользования. К.: Генеза, 1997. 628 с.

ЗМІСТ

Передмова.....	3
Класифікація моделей прогнозу стану навколишнього середовища.....	5
Перелік основних позначень.....	8
1. ПРОЦЕСИ В АТМОСФЕРІ.....	11
1.1. Тепловий баланс.....	11
1.2. Конденсація і сублімація водяної пари. Опади.....	15
1.3. Сили і рух в атмосфері.....	17
1.4. Рівняння руху. Турбулентність.....	21
1.5. Пограничний і приземний шари атмосфери.....	24
1.6. Рівняння турбулентної дифузії в атмосфері.....	27
1.7. Параметри рівняння турбулентної дифузії.....	30
1.8. Двовимірне наближення рівняння турбулентної дифузії.....	34
1.9. Перенос і дифузія домішки в умовах змінного вітру.....	37
1.10. Дифузія домішки від точкового джерела.....	40
1.11. Моделі поширення домішок в атмосфері.....	45
Питання та вправи до розділу.....	48
Рекомендована література.....	49
2. МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ У ПОВЕРХНЕВИХ ВОДАХ	52
2.1. Руслові процеси.....	52
2.2. Трансформація речовин у водному середовищі.....	56
2.3. Гідрравлічні параметри відкритого потоку.....	58
2.4. Нерівномірний усталений рух води у відкритих руслах....	62
2.5. Неусталена течія у відкритих руслах.....	65
2.6. Моделі хвиль у поверхневих водотоках.....	68
2.7. Рівняння переносу домішки у водному середовищі.....	72
2.8. Параметри рівняння переносу домішок у поверхневих водах.....	75
2.9. Моделі переносу домішок у водотоках.....	78
2.10. Перенос і осадження завислих речовин у поверхневих водах.....	80
2.11. Дифузія домішок у морському середовищі.....	84
Питання та вправи до розділу.....	88
Рекомендована література.....	90

3. ФІЛЬТРАЦІЯ І МАСОПЕРЕНОС У ПІДЗЕМНИХ ВОДАХ	92
3.1. Фізична і геометрична характеристика пористих середовищ. Підземні води.....	92
3.2. Модель суцільного фільтраційного потоку. Закон Дарсі...	96
3.3. Рівняння напірного потоку.....	101
3.4. Рівняння безнапірного потоку.....	104
3.5. Фізико-хімічні процеси у фільтраційному потоці.....	107
3.6. Диференціальні рівняння масопереносу в підземних водах.....	110
3.7. Моделювання фільтраційних течій.....	115
3.8. Моделі прогнозу міграції забруднень у підземних водах..	120
3.9. Вологоперенос у ненасиченому пористому середовищі...	126
3.10. Фільтрація двофазної рідини.....	130
Питання та вправи до розділу.....	134
Рекомендована література.....	135
4. ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ.....	138
4.1. Розрахунок зони розсіювання домішки в атмосфері навколо точкового стаціонарного викиду.....	138
4.2. Розрахунок переносу й осадження вагової домішки в атмосфері після миттєвого викиду.....	140
4.3. Розрахунок забруднення ріки після разового скидання стічних вод.....	143
4.4. Розрахунок забруднення ріки при постійному скиданні стічних вод.....	146
4.5. Розрахунок підйому ґрунтових вод поблизу водовідстійника.....	149
4.6. Розрахунок міграції забруднюючих речовин у підземних водах поблизу водовідстійника	152
Короткий україно-російський словник деяких виразів, що зустрічаються в тексті.....	155
Список рекомендованої літератури із загальних та спеціальних питань екології та охорони навколишнього середовища.....	156

Навчальне видання

Дмитро Вікторович Рудаков

**МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ
В ОХОРОНІ НАВКОЛИШНЬОГО СЕРЕДОВИЩА**

Навчальний посібник

Українською мовою

Редактор В.П. Пименов
Технічний редактор В.А.Усенко
Коректор В.П. Пименов

Оригінал-макет виготовлений Д.В. Рудаковим

Свідоцтво держ. реєстрації № 289-ДК

Підписано до друку . . .04. Формат 60×84.¹/₁₆ Папір друкарський. Друк плоский.
Гарнітура . Ум. друк. арк. 9,3. Ум. фарб.-відб. 9,3. Обл.-вид. арк. 9,46.
Наклад 200 прим. Вид. № 1128. Замовне. Зам. №

Видавництво Дніпропетровського університету,
пр. Гагаріна, 72, м. Дніпропетровськ, 49050
Друкарня ДНУ, м. Дніпропетровськ, вул. Наукова, 5, 49050,